1 | Suchbild (10 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix} \qquad h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2 \\ 0 \\ y-2 \end{pmatrix} \qquad j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zu den $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen jeweils die Dimension des Kerns und des Bildes, indem Sie eine explizite Basis von Kern und Bild angeben. *(Sie sollten natürlich auch nachweisen, dass die von Ihnen angegebenen Tupel tatsächlich Basen sind.)*

f linear: 1 P

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y+y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$f\left(s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ sy \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[Alternativ:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$ also f linear nach Satz 6.3]

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 0 \right\}$$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ hat Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, also

$\boxed{\text{einzelner Vektor} \neq 0 \text{ ist linear unabhängig}}$

$\dim(\ker(f)) = 1.$ 1 P

$\boxed{\text{einzelner Vektor} \neq 0 \text{ ist linear unabhängig}}$

$\operatorname{im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ has Basis $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, also

$\dim(\operatorname{im}(f)) = 1.$ 1 P

g linear: 1 P

$$g\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)=g\left(\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+x'+y+y'\\x+x'+y+y'\\x+x'+y+y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+x'+y'\\x+y+x'+y'\\x+y+x'+y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x+y\\x+y\\x+y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'+y'\\x'+y'\\x'+y'\end{pmatrix}=g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+g\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$g\left(s\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=g\begin{pmatrix}sx\\sy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sx+sy\\sx+sy\\sx+sy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\cdot(x+y)\\s\cdot(x+y)\\s\cdot(x+y)\end{pmatrix}$$

$$=s\cdot\begin{pmatrix}x+y\\x+y\\x+y\end{pmatrix}=s\cdot g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

[Alternativ: $g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$]

$$\ker(g)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\in\mathbb{R}\right\}$$

einzelner Vektor $\neq \underline{0}$ ist linear unabhängig

$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$ hat Basis $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, also

einzelner Vektor $\neq \underline{0}$ ist linear unabhängig

$\dim(\ker(g))=1$. 1 P

$\operatorname{im}(g)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ hat Basis $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, also

$\dim(\operatorname{im}(g))=1$. 1 P

h ist nicht linear: $h\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\neq\underline{0}$ 1 P

j ist linear: 1 P

$$j\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)=j\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(x+x')-(y+y')\\3(y+y')\\(x+x')+2(y+y')\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2x-y+2x'-y'\\3y+3y'\\x+2y+x'+2y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y\\3y\\x+2y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x'-y'\\3y'\\x'+2y'\end{pmatrix}$$

$$=j\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+j\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$j\left(s\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=j\begin{pmatrix}sx\\sy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2sx-sy\\3sy\\sx+2sy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\cdot(2x-y)\\s\cdot 3y\\s\cdot(x+2y)\end{pmatrix}$$

$$=s\cdot\begin{pmatrix}2x-y\\3y\\x+2y\end{pmatrix}=s\cdot j\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

[Alternativ: $j\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$]

$$\ker(j)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x-y=0 \wedge 3y=0 \wedge x+2y=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x=0 \wedge x=0\right\}$$

$=\{\underline{0}\}$ hat Basis () (leeres Tupel),

also $\dim(\ker(j))=0$. 1 P

$$\operatorname{im}(j)=\left\{x\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

hat Basis $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right)$, denn

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ ist linear unabhängig:

$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

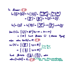
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2s_1 - s_2 \\ 3s_2 \\ s_1 + 2s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s_2 = 0 \wedge s_1 = 0.$$

[Alternativ:

$\dim(\operatorname{im}(f)) = 2 - 0 = 2$ nach Rangsatz, also ist jedes Erzeugendensystem mit 2 Elementen eine Basis]

Daher: $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2.$ 1 P

[Nicht mehr existenter Aufgabenteil: ]

Jeweils nur $\frac{1}{4}$ P statt 1 P bei Angabe der Dimension ohne Basis. Begründungen zu linearer Unabhängigkeit dürfen so kurz wie in dieser Lösung, aber nicht noch kürzer sein.

2 | Spielverderber (10 Punkte)

In einem reellen Vektorraum seien Vektoren $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ gegeben. Ferner seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \mathbf{v}_1 & := & 2\mathbf{u}_1 & + & 2\mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & - & \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_2 & := & & - & \mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & - & \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_3 & := & \mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & + & 3\mathbf{u}_3 & - & \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_4 & := & \mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & + & \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_5 & := & \mathbf{u}_1 & & & - & \mathbf{u}_3 & + & \mathbf{u}_4 \end{array}$$

Ist das Tupel $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5)$ linear unabhängig?

Alternative A:

Nein:

$\dim\langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_4\rangle \leq 4$ nach Basisauswahlsatz. (3 P)

Falls $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_5)$ linear unabhängig, folgt andererseits nach Basisergänzungssatz: $\dim\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_5\rangle \geq 5$. (3 P)

Es ist aber per Def. $\underline{v}_i \in \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_4\rangle$ für jedes i, somit

$$\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_5\rangle \subseteq \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_4\rangle, \qquad (2P)$$

und somit (nach Basisergänzungssatz)

$$5 \leq \dim\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_5\rangle \underset{(+1P)}{\leq} \dim\langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_4\rangle \leq 4$$

$\lightning$ (1P)

Also $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_5)$ linear abhängig. $\square$

Alternative B:

Ansatz:

$$s_1 \cdot \underline{v}_1 + s_2 \cdot \underline{v}_2 + s_3 \cdot \underline{v}_3 + s_4 \cdot \underline{v}_4 + s_5 \cdot \underline{v}_5 = \underline{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (2s_1 + s_3 + s_4 + s_5)\,\underline{u}_1 = 0 \\ \wedge\ (2s_1 - s_2 + s_3 + s_4)\,\underline{u}_2 = 0 \\ \wedge\ (s_1 + s_2 + 3s_3 + s_4 - s_5)\,\underline{u}_3 = 0 \\ \wedge\ (-s_1 - s_2 - s_3 + s_4 + s_5)\,\underline{u}_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2s_1 + s_3 + s_4 + s_5 = 0 \\ \wedge\ 2s_1 - s_2 + s_3 + s_4 = 0 \\ \wedge\ s_1 + s_2 + 3s_3 + s_4 - s_5 = 0 \\ \wedge\ -s_1 - s_2 - s_3 + s_4 + s_5 = 0 \end{cases}$$

-1

(3 Punkte für diesen Ansatz bis hier)

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 &= 0 \\ 2s_1 - s_2 + s_3 + s_4 &= 0 \\ s_1 + s_2 + 3s_3 + s_4 - s_5 &= 0 \\ 2s_1 + s_3 + s_4 + s_5 &= 0 \end{aligned}$$

-2 $\quad -$ $\quad -2$

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 &= 0 \\ -3s_2 - s_3 + 3s_4 + 2s_5 &= 0 \quad \Big| \cdot -\tfrac{1}{3} \\ 2s_3 + 2s_4 &= 0 \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{2} \\ -2s_2 - s_3 + 3s_4 + 3s_5 &= 0 \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 &= 0 \\
s_2 + \tfrac{1}{3} s_3 - s_4 - \tfrac{2}{3} s_5 &= 0 \\
s_3 + s_4 &= 0 \\
- s_2 - \tfrac{1}{2} s_3 + \tfrac{3}{2} s_4 + \tfrac{3}{2} s_5 &= 0
\end{aligned}$$

$-$ $+$

$$\begin{aligned}
s_1 + \tfrac{2}{3} s_3 - \tfrac{1}{3} s_5 &= 0 \\
s_2 + \tfrac{1}{3} s_3 - s_4 - \tfrac{2}{3} s_5 &= 0 \\
s_3 + s_4 &= 0 \\
-\tfrac{1}{6} s_3 + \tfrac{1}{2} s_4 + \tfrac{5}{6} s_5 &= 0
\end{aligned}$$

$-\tfrac{2}{3}$ $-\tfrac{1}{3}$ $+\tfrac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
s_1 - \tfrac{2}{3} s_4 - \tfrac{1}{3} s_5 &= 0 \\
s_2 - \tfrac{4}{3} s_4 - \tfrac{2}{3} s_5 &= 0 \\
s_3 + s_4 &= 0 \\
\tfrac{2}{3} s_4 + \tfrac{5}{6} s_5 &= 0 \quad \Big| \cdot \tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1 - \tfrac{2}{3} s_4 - \tfrac{1}{3} s_5 &= 0 \\
s_2 - \tfrac{4}{3} s_4 - \tfrac{2}{3} s_5 &= 0 \\
s_3 + s_4 &= 0 \\
s_4 + \tfrac{5}{4} s_5 &= 0
\end{aligned}$$

$-$ $+\tfrac{4}{3}$ $+\tfrac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
s_1 + \tfrac{1}{2} s_5 &= 0 \\
s_2 + s_5 &= 0 \\
s_3 - \tfrac{5}{4} s_5 &= 0 \\
s_4 + \tfrac{5}{4} s_5 &= 0
\end{aligned}$$

Wähle nun z.B. $s_5 = 4$.

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
s_1 &= -2 \\
s_2 &= -4 \\
s_3 &= 5 \\
s_4 &= -5
\end{aligned}$$

−0,5 Punkte je Rechenfehler

Behauptung daher:

$$\boxed{-2\underline{v}_1 - 4\underline{v}_2 + 5\underline{v}_3 - 5\underline{v}_4 + 4\underline{v}_5 = \underline{0}}$$

Das lässt sich leicht nachrechnen und zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.

falls Herleitung fehlt sollte zumindest diese Rechnung verschriftlicht sein