Aufgabe 3

Setze $\partial : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \sum_{i\geq 0} a_i x^i \mapsto \sum_{i \geq 1} i a_i x^{i-1}$

und seien $\sum_{i\geq 0} a_i x^i, \sum_{i\geq 0} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gelten

$$\partial\Big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i + \sum_{i\geq 0} b_i x^i\Big) = \partial\Big(\sum_{i\geq 0} (a_i + b_i) x^i\Big)$$

$$= \sum_{i\geq 1} i(a_i+b_i) x^{i-1}$$

$$= \Big(\sum_{i\geq 1} i a_i x^{i-1}\Big) + \Big(\sum_{i\geq 1} i b_i x^{i-1}\Big)$$

$$= \partial\Big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\Big) + \partial\Big(\sum_{i\geq 0} b_i x^i\Big)$$

und

$$\partial\Big(\lambda \sum_{i\geq 0} a_i x^i\Big) = \partial\Big(\sum_{i\geq 0} (\lambda a_i) x^i\Big) = \sum_{i\geq 1} i(\lambda a_i) x^{i-1}$$

$$= \lambda \sum_{i\geq 1} a_i x^{i-1}$$

$$= \lambda\, \partial\Big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\Big),$$

sodass ∂ ein Endomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist.

Nun bestimmen wir den Kern von ∂:

$$\ker(\partial) = \Big\{ \sum_{i\geq 0} a_i x^i \in \mathbb{R}[x] \;\Big|\; \underbrace{\partial\Big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\Big)}_{\sum_{i\geq 1} i a_i x^i} = 0 \Big\}$$

Ist also $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ im Kern von ∂, so muss $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ gelten, sodass

$$\sum_{i\geq 0} a_i x^i = a_0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x].$$

Andersherum ist $\partial(a_0) = 0$ für $a_0 \in \mathbb{R}$ und wir erhalten $\ker(\partial) = \{a_0 \in \mathbb{R}[x] \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$.

Das Bild von ∂ ist ganz $\mathbb{R}[x]$:

Sei $\sum_{i\geq 0} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ und betrachte das Element $\sum_{i\geq 0} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} \in \mathbb{R}[x]$. Dann gilt

$$\partial\Big(\sum_{i\geq 0} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}\Big) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i.$$

Aufgabe 4

Angenommen, $W \not\subset V_1$ und $W \not\subset V_2$. Dann existieren $w_1 \in W \setminus V_1$ und $w_2 \in W \setminus V_2$. Da $W \subset V_1 \cup V_2$, müssen also $w_1 \in V_2$ und $w_2 \in V_1$ gelten. Nun ist W als UVR abgeschlossen unter Vektoraddition, sodass $w_1 + w_2 \in W \subset V_1 \cup V_2$.

Es gilt also $w_1 + w_2 \in V_1$ oder $w_1 + w_2 \in V_2$.

Im ersten Fall erhalten wir

$$w_1 = \underbrace{w_1 + w_2}_{\in V_1} - \underbrace{w_2}_{\in V_1} \in V_1 \ ↯$$

und im zweiten Fall analog

$$w_2 = \underbrace{w_1 + w_2}_{\in V_2} - \underbrace{w_1}_{\in V_2} \in V_2 \ ↯$$

Somit war unsere Annahme falsch, sodass $W \subset V_1$ oder $W \subset V_2$.