Aufgabe 3

Anzahl Abbildungen:

Für jedes der drei Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ haben wir sechs potentielle Bilder und somit $6^3 = 216$ Abbildungen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Anzahl Gruppenhomomorphismen:

Da Gruppenhomomorphismen neutrale Elemente auf neutrale Elemente abbilden, haben wir für $[0] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nur eine Wahl. An das Bild der $[1] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ haben wir nur die Einschränkung, dass drei mal das Bild $[0] \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ergeben muss, da $3[1] = [0] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Hier haben wir somit drei Wahlen $([0], [2], [4] \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.

Da $[2] = [1] + [1]$ und wir an Gruppenhomomorphismen interessiert sind, haben wir nun keine Wahl mehr, außer $[2]$ auf zwei mal das Bild von $[1] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ abzubilden.

Insgesamt also $1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$ Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Anzahl Ringhomomorphismen:

Ringhomomorphismen bilden neutrale Elemente auf neutrale Elemente ab. Somit ist wie bei den Gruppenhomomorphismen bereits alles festgelegt:

$[0] \mapsto [0]$

$[1] \mapsto [1]$

$[2] \mapsto 2[1] = [2]$

Dies definiert aber nichtmal eine Gruppenhomomorphismus, da

$3[1] = [0] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,

aber

$3[1] \neq [0] \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Es gibt also keinen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4

Zunächst einmal gilt

$$\underbrace{x^3 - 3x^2 + 2x}_{=f} = x(x^2 - 3x + 2).$$

In $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$:

Man kann natürlich alle zwölf Elemente von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ einsetzen und erhält so die Nullstellen von $x^3 - 3x^2 + 2x$ in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Wir wollen hier etwas anders vorgehen:

Der Isomorphismus von Gruppen

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad [a]_{12} \mapsto ([a]_3, [a]_4)$$

ist per Definition der Ringstruktur von Ringen der Form $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sogar ein Ringhomomorphismus. Somit ist ein Element $[a]_{12} \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ genau dann eine Nullstelle von f, falls die Reduktionen $[a]_3$ und $[a]_4$ Nullstellen von f sind.

Mittels Einsetzen erhalten wir nun, dass

$[0]_3, [1]_3, [2]_3$

und

$[0]_4, [1]_4, [2]_4$

genau die Nullstellen von f in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind. Somit erhalten wir die Nullstellen

$$\left(\begin{array}{ll}
[0]_{12} & \overset{\cong}{\mapsto} ([0]_3, [0]_4) \\
[1]_{12} & \overset{\cong}{\mapsto} ([1]_3, [1]_4) \\
[2]_{12} & \overset{\cong}{\mapsto} ([2]_3, [2]_4) \\
[4]_{12} & \overset{\cong}{\mapsto} ([1]_3, [0]_4) \\
[5]_{12} & \overset{\cong}{\mapsto} ([2]_3, [1]_4) \\
[6]_{12} & \overset{\cong}{\mapsto} ([0]_3, [2]_4) \\
[8]_{12} & \overset{\cong}{\mapsto} ([2]_3, [0]_4) \\
[9]_{12} & \overset{\cong}{\mapsto} ([0]_3, [1]_4) \\
[10]_{12} & \overset{\cong}{\mapsto} ([1]_3, [2]_4)
\end{array}\right)$$

von f in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

In $\mathbb{Z}/\underbrace{101}_{\text{prim}}\mathbb{Z} = \mathbb{F}_{101}$:

Da $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ ein Körper ist, kann f höchstens drei Nullstellen in $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ besitzen. Diese gibt es auch:

$$[0]([0]^2 - [3][0] + [2]) = [0]$$
$$[1]([1]^2 - [3][1] + [2]) = [0]$$
$$[2]([2]^2 - [3][2] + [2]) = [0]$$

$\rightsquigarrow$ $[0], [1], [2] \in \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ sind die drei Nullstellen von f.