1 | Polynomdivision (10 Punkte)

Für welche der folgenden Paare von Polynomen A, B existiert in $\mathbb{Z}[X]$ eine Darstellung $A = QB + R$ mit $\deg(R) < \deg(B)$? Bestimmen Sie in diesen Fällen Q und R!

(a) $A = X^7 + 3X^5 + 7X^4 + X^3 + X + 1$, $\quad B = X^3 + X + 1$

(b) $A = X^3 + X + 1$, $\quad B = X^7 + 3X^5 + 6$

(c) $A = X^8 + 4X^7 + 7X^4 - X^3 - X^2 - 1$, $\quad B = 2X^2 - 2X + 2$

Alle diese Polynome lassen sich auch als Elemente von $\mathbb{Q}[X]$ auffassen. Für welche der Polynome A und B existiert in $\mathbb{Q}[X]$ eine Darstellung $A = QB + R$ mit $\deg(R) < \deg(B)$? Bestimmen Sie auch in diesen Fällen Q und R!

[korrigiert 13.12.21]

(a) 4P

3,5 P: −0,5P pro Rechenfehler

über $\mathbb{Z}$:

Q $\boxed{X^4 + 2X^2 + 6X - 1}$

$$(X^7 + 3X^5 + 7X^4 + X^3 + X + 1) : (X^3 + X + 1)$$
$$-(X^7 + X^5 + X^4)$$
$$2X^5 + 6X^4 + X^3 + X + 1$$
$$-(2X^5 + 2X^3 + 2X^2)$$
$$6X^4 - X^3 - 2X^2 + X + 1$$
$$-(6X^4 + 6X^2 + 6X)$$
$$-X^3 - 8X^2 - 5X + 1$$
$$-(-X^3 - X - 1)$$
$$R \; \boxed{-8X^2 - 4X + 2}$$

über $\mathbb{Q}$: Rechnung wie über $\mathbb{Z}$ mit demselben Ergebnis.

0,5P

(b) 1P

über $\mathbb{Z}$: $Q = 0$, $R = A$. 0,5P

über $\mathbb{Q}$: $Q = 0$, $R = A$. 0,5P

(c) 5P

über $\mathbb{Z}$: keine Division mit Rest möglich, da $2 \in \mathbb{Z}^\times$

0,5P

$B = 2x^2 - 2x + 2$

über $\mathbb{Q}$: 4,5P; −0,5P pro Rechenfehler

$$Q: \boxed{\tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{5}{2}x^5 + 2x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + x^2 + x - \tfrac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&(x^8 + 4x^7 + 7x^4 - x^3 - x^2 - 1) : (2x^2 - 2x + 2)\\
&-(x^8 - x^7 + x^6)\\
\hline
&5x^7 - x^6 + 7x^4 - x^3 - x^2 - 1\\
&-(5x^7 - 5x^6 + 5x^5)\\
\hline
&4x^6 - 5x^5 + 7x^4 - x^3 - x^2 - 1\\
&-(4x^6 - 4x^5 + 4x^4)\\
\hline
&-x^5 + 3x^4 - x^3 - x^2 - 1\\
&-(-x^5 + x^4 - x^3)\\
\hline
&2x^4 - x^2 - 1\\
&-(2x^4 - 2x^3 + 2x^2)\\
\hline
&2x^3 - 3x^2 - 1\\
&-(2x^3 - 2x^2 + 2x)\\
\hline
&-x^2 - 2x - 1\\
&-(-x^2 + x - 1)\\
\hline
&R: \boxed{-3x}
\end{aligned}
$$

Bitte selbst noch einmal nachrechnen...

2 | Ecce homo II (10 Punkte)

Wir werden in Def. 4.12 der Vorlesung sehen: Eine Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen $(V, +, \odot)$ und $(W, +, \odot)$ ist K-**linear**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ und alle $r \in K$ gilt $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$ und $f(r \odot \mathbf{v}) = r \odot f(\mathbf{v})$.

Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 - 3x$

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x^2$

(c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

(d) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x^2/y & \text{falls } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases}$

(e) $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $A \mapsto X^2 \cdot A$

(f) $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $A \mapsto A(7)$

(g) $\mathbb{R}[X] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $A \mapsto \mathrm{ev}(A)$

(a) 1P nicht linear, denn $0 \mapsto 2 \neq 0$

(b) 1,5P nicht linear:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 0 \\ + & & + \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ \| & & \# \\ 2 & \longmapsto & 4 \end{array}$$

(c) 1,5P linear: Nenne Abb. f.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+y' \\ x+x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$f\left(r \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ry \\ rx \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = r \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(d) 1,5P nicht linear:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \longmapsto & 0 \\ + & & + \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & 1 \\ \| & & \# \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & 4 \end{array}$$

(e) 1,5P linear: Nenne Abb. f

$$f(A+B) = X^2\cdot(A+B) = X^2\cdot A + X^2\cdot B$$
$$= f(A) + f(B)$$

Distributivität im Polynomring

$$f(r\cdot A) = X^2\cdot(r\cdot A) = r\cdot(X^2\cdot A) = r\cdot f(A)$$

Kommutativität & Assoziativität der Multiplikation im Polynomring

Für volle Punktzahl reicht Rechnung ODER Verweis auf Distributivität/Kommutativität/Assoziativität im Polynomring.

(f) 1,5P linear: Nenne Abb. f.

Für $r \in \mathbb{R}$, $\left.\begin{array}{l} A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \\ B = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \end{array}\right\} \in \mathbb{R}[X]$

gilt:

$$f(A+B) = f\left(\sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) X^i\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i)\cdot 7^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 7^i + \sum_{i=0}^{m} b_i 7^i$$

$$= f(A) + f(B)$$

$$f(r \cdot A) = f\Big(\sum_{i=0}^{n} r \cdot a_i X^i\Big)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} r \cdot a_i \cdot 7^i$$
$$= r \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 7^i$$
$$= r \cdot f(A)$$

(g) 1,5P linear:

$er(A+B) = er(A) + er(B)$, denn $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(er(A+B))(x) = (er\,A)(x) + (er\,B)(x)$$

Wie in Aufgabenteil (f)

notwendiger Verweis; sonst ausführliche Rechnung nötig oder −0,25 P

$$= (er(A) + er(B))(x)$$

Def. von + in Abb($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$), siehe Vorlesung Beispiel (d) nach Notiz 4.2

(optionale Begründung)

$ev(r\cdot A) = r\cdot ev(A)$ denn $\forall x\in\mathbb{R}$ gilt:

$$(ev(r\cdot A))(x) = r\cdot(evA(x))$$

$$= (r\cdot evA)(x)$$

$\boxed{\text{wie in Aufgabenteil (f)}}$

notwendiger Verweis; sonst ausführliche Rechnung nötig oder −0,25 P

Def. von + in Abb($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$), siehe Vorlesung Beispiel (d) nach Notiz 4.2

(optionale Begründung)

Diesen letzten Aufgabenteil bitte streng bewerten. Es ist leicht etwas hinzuschreiben das halbwegs richtig aussieht aber bei näherer Betrachtung wenig Sinn ergibt.