Aufgabe 3

Schreibe $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$.

(a)

Um eine Teilmenge N von M anzugeben, haben wir für jedes der n Elemente $m_1, \ldots, m_n$ von M zwei Optionen, nämlich "$\in N$" und "$\notin N$". Somit haben wir insgesamt 2^n Teilmengen, sodass $P(M)$ insbesondere endlich ist.

(b)

Betrachte die Abbildung

$$f: P^1(M) \to P^0(M), \quad \underbrace{N \mapsto (N \cup \{m_0\}) \setminus (N \cap \{m_0\})}_{\substack{\text{ist } m_0 \notin N, \text{ so füge } m_0 \text{ zu } N \\ \text{hinzu} \\ \text{ist } m_0 \in N, \text{ so entferne } m_0 \text{ aus } N}}$$

für ein festes $m_0 \in M$ (ex., da $M \neq \emptyset$). Diese Abbildung ist offenbar bijektiv, denn diese Abbildungsvorschrift definiert die Umkehrabbildung g (siehe):

Ist $N \in P^1(M)$, so ist

$$g \circ f(N) = \begin{cases} g(N \setminus \{m_0\}), & m_0 \in N \\ g(N \cup \{m_0\}), & m_0 \notin N \end{cases}$$

$$= \begin{cases} N, & m_0 \in N \\ N, & m_0 \notin N \end{cases}$$

$$= N.$$

Andersherum zeigt dieselbe Rechnung, dass $f \circ g$ auch die Identität auf $P^0(M)$ ist. Also gilt $f^{-1} = g$ und f ist bijektiv.

(c)

Nach Aufgabenteil (ii) gilt

$$\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} \overset{(*)}{=} \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ ungerade}}} \binom{n}{k}$$

und somit

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ gerade}}} \underbrace{(-1)^k}_{\text{stets } 1} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ ungerade}}} \underbrace{(-1)^k}_{\text{stets } -1} \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ ungerade}}} \binom{n}{k}$$

$$= 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Sei $P(M)$ die Potenzmenge einer Menge M. Dann ist für jedes Element $m \in M$ die 1-elementige Teilmenge $\{m\} \subset M$ ein Element von $P(M)$, sodass wir die Abbildung

$$f: M \to P(M), \quad m \mapsto \{m\}$$

definieren können. Sind nun $m, m' \in M$ mit

$$\{m\} = f(m) = f(m') = \{m'\},$$

so gilt offenbar $m = m'$, sodass die Abbildung f injektiv ist.

Nun nehmen wir mal an, es gäbe eine surjektive Abbildung $g: M \to P(M)$. Dann hätte die Menge

$$X = \{m \in M \mid m \notin g(m)\} \in P(M)$$

ein Urbild unter g, d.h. es existiert ein $m_0 \in M$ mit $g(m_0) = X$. Dies widerspricht der Def. von X. Also kann es kein solches g geben. Insbesondere kann es also keine bijektive Abbildung von M nach $P(M)$ geben.