Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
M.Sc. Thor Wittich

Wintersemester 2021/22
25.10.2021

Lineare Algebra I
Blatt 2

Die Aufgabenstellung ist bei allen Aufgaben auf allen Blättern identisch: Alle Behauptungen sind zu beweisen. Alle Fragen sind zu beantworten. Alle Antworten sind zu begründen. Auf diesem Blatt ist das ausnahmsweise noch einmal ausformuliert.

1 | Dienst nach Vorschrift

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Abbildungen? Welche der wohldefinierten Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

(c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x^2 \mapsto x$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

(e) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\frac{a}{b} \mapsto \frac{b}{a}$

(f) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} n-1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n+1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(g) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto$ Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n

Beantworten Sie diese Fragen! Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

Geben Sie **außerdem** zu den bijektiven Abbildungen jeweils die Umkehrabbildung an!

(Für eine nicht-negative reelle Zahl x bezeichnet das Symbol $\sqrt{x}$ die nicht-negative Wurzel von x.)

2 | Schnittbild

Das Bilden von Urbildern vertauscht mit Vereinigungen und Schnitten: für beliebige Abbildungen $f\colon M \to N$ und beliebige Familien von Teilmengen $N_i \subseteq N$ gilt

$$f^{-1}(\textstyle\bigcup_{i\in I} N_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(N_i) \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(\bigcap_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(N_i).$$

Beweisen Sie das! Wie sieht es mit Bildern aus? Gilt auch $f(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} f(M_i)$ für beliebige Teilmengen $M_i \subseteq M$? **Beantworten Sie das! Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel!** Gilt $f(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} f(M_i)$? **Beantworten Sie das! Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel!**

3 | Binomis Baukasten ★

Sei M eine endliche Menge mit n Elementen.

(a) Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ ist wieder endlich. Aus wie vielen Elementen besteht sie? **Beantworten Sie das! Geben Sie einen Beweis für die Richtigkeit Ihrer Antwort!**

(b) Ist M nicht leer, so sind die Menge $\mathfrak{P}^0(M) \subset \mathfrak{P}(M)$ der Teilmengen, die aus einer geraden Anzahl von Elementen bestehen, und die Menge $\mathfrak{P}^1(M)$ der Teilmengen, die aus einer ungeraden Anzahl von Elementen bestehen, gleich mächtig (d.h., es gibt eine Bijektion $\mathfrak{P}^0(M) \cong \mathfrak{P}^1(M)$). **Beweisen Sie das!**

(c) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist definiert als die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Aus dem vorherigen Aufgabenteil folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$. **Beweisen Sie das!**

4 | Machtdemonstration ★

Die Potenzmenge einer Menge ist stets mächtiger als die Menge selbst: für jede Menge M existiert eine injektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$, aber für keine Menge M existiert eine solche Abbildung, die bijektiv ist. **Beweisen Sie das!**