1 | Tertium non datur

Ein Grundprinzip der klassischen Logik besagt: für jede beliebige Aussage X gilt genau einer der Aussagen X (die Aussage selbst) und $\neg X$ (die Negation der Aussage). Formulieren Sie jeweils die Negation der folgenden Aussagen:

(a) Grün ja grün sind alle meine Kleider. [Volkslied]

X:

$$(\forall K \in \text{MeineKleider}: K \text{ ist grün})$$

$\neg X$:

$$\neg(\forall K \in \text{MeineKleider}: K \text{ ist grün})$$

$$\exists K \in \text{MeineKleider}: \neg(K \text{ ist grün})$$

$$\exists K \in \text{MeineKleider}: K \text{ ist nicht grün.}$$

Ich habe ein Kleid, das nicht grün ist.

(b) Sie können an der Veranstaltung teilnehmen, wenn Sie geimpft, getestet oder genesen sind.

$$X: \underbrace{(G_1 \lor G_2 \lor G_3)}_{A} \Rightarrow \underbrace{\text{Teilnahme möglich}}_{B}$$

$$A \Rightarrow B$$

$$\neg A \lor B$$

$$\neg X: \neg(\neg A \lor B)$$

$$(\neg\neg A) \land (\neg B)$$

$$A \land (\neg B)$$

$$(G_1 \lor G_2 \lor G_3) \land \text{Teilnahme unmöglich}$$

Sie sind geimpft, getestet oder genesen und können (trotzdem) nicht an der Veranstaltung teilnehmen.

(c) Das Überholen ist unzulässig bei unklarer Verkehrslage oder wenn es durch ein angeordnetes Verkehrszeichen untersagt ist. [StVO]

X:

$$\underbrace{\left(\left(\begin{matrix}\text{Lage}\\ \text{unklar}\end{matrix}\right) \vee \text{Zeichen}\right)}_{A} \Rightarrow \underbrace{\begin{matrix}\text{Überhol-}\\ \text{verbot}\end{matrix}}_{B}$$

$$A \Rightarrow B$$

$$\neg A \vee B$$

$$\neg X: \neg(\neg A \vee B)$$

$$A \wedge (\neg B)$$

$$\left(\left(\begin{matrix}\text{Lage}\\ \text{unklar}\end{matrix}\right) \vee \text{Zeichen}\right) \wedge \neg\left(\begin{matrix}\text{Überhol-}\\ \text{verbot}\end{matrix}\right)$$

Sie dürfen überholen, obwohl die Verkehrslage unklar $\boxed{\text{oder}}$ ein Verkehrszeichen das Überholen untersagt.

Korrektur 8.11.21

(d) Sie werden zur Prüfung zugelassen, wenn Sie die Zulassung in diesem Semester erwerben oder wenn Sie eine der folgenden Voraussetzungen erfüllen: Sie sind in einem der Studiengänge MAA, FVM oder NVM eingeschrieben und haben bereits einmal erfolglos an einer Prüfung zur Linearen Algebra I teilgenommen, oder Sie sind in einem der Studiengänge IFO, PHY, MPH, CLI eingeschrieben und haben die Zulassung bereits in einem früheren Semester erworben.

$$X: \left[\begin{pmatrix}\text{Erwerb}\\ \text{jetzt}\end{pmatrix} \vee \left(\begin{pmatrix}\text{MAA}\\ \text{etc.}\end{pmatrix} \wedge \text{erfolglos}\right) \vee \left(\begin{pmatrix}\text{IFO}\\ \text{etc.}\end{pmatrix} \wedge \text{früher}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \text{Zulassung}$$

genau wie oben:

$$\neg X: \left[\begin{pmatrix}\text{Erwerb}\\ \text{jetzt}\end{pmatrix} \vee \left(\begin{pmatrix}\text{MAA}\\ \text{etc.}\end{pmatrix} \wedge \text{erfolglos}\right) \vee \left(\begin{pmatrix}\text{IFO}\\ \text{etc.}\end{pmatrix} \wedge \text{früher}\right)\right]$$

$$\wedge \neg \text{Zulassung}$$

Sie werden nicht zur Prüfung zugelassen, obwohl Sie die Zulassung in diesem Semester erwerben oder eine der folgenden ...

... Voraussetzungen erfüllen: Sie sind in einem der Studiengänge MAA, FVM oder NVM eingeschrieben und haben bereits einmal erfolglos an einer Prüfung zur Linearen Algebra I teilgenommen, oder Sie sind in einem der Studiengänge IFO, PHY, MPH, CLI eingeschrieben und haben die Zulassung bereits in einem früheren Semester erworben.

(e) Es gibt genau eine gerade Primzahl.

$$X: \overbrace{(\exists p \in \text{Primzahl}: p \text{ gerade})}^{A} \land \underbrace{\left(\forall p,q \in \text{Primzahl}: (p \text{ gerade} \land q \text{ gerade} \Rightarrow p = q)\right)}_{B}$$

$$\neg X: \neg(A \land B)$$

$$(\neg A) \lor (\neg B)$$

$$\neg(\exists p \in \text{Primzahl}: p \text{ gerade}) \lor \neg\left(\forall p,q \in \text{Primzahl}: (p \text{ gerade} \land q \text{ gerade} \Rightarrow p = q)\right)$$

$$\forall p \in \text{Primzahl}: \neg(p \text{ gerade}) \lor \left(\exists p,q \in \text{Primzahl}: \neg(\underbrace{p \text{ gerade} \land q \text{ gerade}}_{C} \Rightarrow \underbrace{p = q}_{D})\right)$$

$$\neg(C \Rightarrow D)$$

$$\forall p \in \text{Primzahl}: p \text{ ungerade} \lor \left(\exists p,q \in \text{Primzahl}: \underbrace{p \text{ gerade} \land q \text{ gerade} \land \neg(p = q)}_{C \land \neg D}\right)$$

Alle Primzahlen sind ungerade oder es gibt zwei verschiedene gerade Primzahlen

Alternativ:

$$X : |\{p \in \text{Primzahlen} \mid p \text{ gerade}\}| = 1$$

$$\neg X : |\{p \in \text{Primzahlen} \mid p \text{ gerade}\}| \neq 1$$

jeweils 1 P pro Aufgabenteil

Bei (a) & (e-Alternative) reicht richtige Antwort.

Bei anderen Aufgabenteilen gibt es für richtige Antwort ganz ohne Herleitung nur 0,5 Punkte.

2 | Wenn der Meister Venn nicht wär ...

Seien A und B Teilmengen einer Menge X. Welche der folgenden Aussagen sind allgemein richtig?

(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap B$

falsch

z. B.: $X = \{1\}, \ A = \emptyset, \ B = \emptyset$

$X \setminus (A \cup B) = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$

$(X \setminus A) \cap B = (X \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset$

$\{1\} \neq \emptyset$

1,5 P.

(b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

falsch

z. B.: $X = \{-1, 0, 1\}$

$A = \{-1, 0\}, \ B = \{0, 1\}$

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \{-1\} \cap \{1\} = \emptyset$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{-1, 0, 1\} \setminus \{0\} = \{-1, 1\}$

$\emptyset \neq \{-1, 1\}$

1,5 P.

(c) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup (A \setminus B)$

richtig

$(\subseteq)$ $X \setminus (A \cap B)$

$= (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ de-Morgan (Satz 1.8)

$\subseteq (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup (A \setminus B)$

$(\supseteq)$ $A \setminus B \subseteq X \setminus B,$

also

$(X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup (A \setminus B)$

$\subseteq (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup (X \setminus B)$

$= (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ 1.8.

$= X \setminus (A \cap B)$

Alternativ beide Inklusionen gleichzeitig:

$A \setminus B \subseteq X \setminus B,$

daher $X \setminus B = X \setminus B \cup A \setminus B,$

daher

$X \setminus (A \cap B) \overset{1.8}{=} (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

$= (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup (A \setminus B)$

2P

Alternative: für $x \in X$:

A	B	$A \cap B$	$\boxed{X \setminus (A \cap B)}$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$

A	B	$X \setminus A$	$X \setminus B$	$A \setminus B$	$\boxed{X \setminus A \cup X \setminus B \cup A \setminus B}$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$

Alternative: auf Aussagenlogik zurückführen

In dieser Aufgabe keine Punkte für Antwort ohne Begründung.