Über die algebraische K- und L-Theorie von Mackeykategorien

Diplomarbeit

vorgelegt von
Stefan Schröer
aus
Hamburg

angefertigt am
Mathematischen Institut
der
Georg–August–Universität zu Göttingen
1993

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In dieser Arbeit werden Aspekte einer Kategorie untersucht, die in der Theorie der Transformationsgruppen eine fundamentale Rolle spielt: die Mackeykategorie Ω_G zu einer Gruppe G (siehe Abschnitt 1.4). Der Einfachheit halber beschränken wir uns in unseren Betrachtungen auf endliche Gruppen G. In der Mackeykategorie $\Omega = \Omega_G$ zu G sind alle Daten organisiert, die die Beziehungen der Untergruppen von G betreffen. Durch Ω wird die Induktions- und Restriktionstheorie von G gesteuert: Mackeyfunktoren auf G-MENGEN sind dasselbe wie gewöhnliche Funktoren auf Ω.

Diese Arbeit beschäftigt sich nun mit dem Zusammentreffen der folgenden zwei Phänomene:

1. Die Kategorie Ω besitzt eine Dualität, die unmittelbar aus ihrer formalen Definition ersichtlich ist ("Vertauschung von Restriktion und Induktion").

2. Das Vorliegen einer Dualität in einer Kategorie ist der begriffliche Rahmen, der es gestattet, eine algebraische Theorie von quadratischen und Hermitschen Formen in der gegebenen Kategorie zu definieren, die die klassische Theorie der Formen für Ringe mit Involution verallgemeinert.

Es ist also aus rein formalen Gründen möglich, von quadratischen und Hermitschen Formen und den dazugehörigen Wittgruppen in der Mackeykategorie zu reden.

Nun erscheint es erstrebenswert, dieser formalen Theorie einen geometrischen Sinn zu geben, z. B. im Rahmen von äquivarianten Chirurgietheorien (siehe [L–M]), und die abstrakten Formen in der Kategorie Ω mit der bekannteren Theorie der Formen über Ringen mit Involutionen (z. B. Gruppenringen) in Verbindung zu bringen.

Diese Arbeit konzentriert sich nun auf das letztere. Das generelle Ziel ist es, die Wittgruppen von Ω mit Wittgruppen über Gruppenringen von Weylgruppen von Untergruppen von G in Verbindung zu setzen. Dabei wird man rasch genötigt, verallgemeinerte Wittgruppen zu untersuchen, nämlich die sogenannten L-Gruppen einer Kategorie mit Dualität [Ran4]. Ebenfalls von Interesse ist dann die algebraische K-Theorie von Ω.

Es gibt zwei Beispiele, in denen man sich für die K- oder L-Theorie von darstellungstheoretischen Objekten interessiert, die Gruppen in funktorieller Weise zugeordnet werden. Das klasische Beispiel ist der Gruppenring selbst:

$$G \mapsto K_*(\mathbb{Z}G), \quad G \mapsto L_*(\mathbb{Z}G).$$

Es wurden haupsächlich die folgenden drei Techniken angewendet, um diese Situation zu analysieren:

1. Mayer-Vietoris-Sequenzen für arithmetische Quadrate, siehe [Wall2].

2. Induktionstheorie, siehe [Dr].

3. Verallgemeinerte Pullbacks und ihre Mayer-Vietoris-Sequenzen, siehe [Kli].

Das zweite Beispiel sind die Funktorkategorien auf der Orbitkategorie Or_G, sogenannte Or_G-Moduln

$$G \mapsto K_*(\mathrm{Or}_G\text{-fpmod}),$$

siehe [Lueck]. In diesem Falle wird die EI-Eigenschaft der Orbitkategorie ausgenutzt, um Zerfällungsresultate zu erlangen.

In dieser Arbeit werden ähnliche Zerfällungresultate angestrebt. Dabei werden die obigen Techniken kombiniert. Die Untersuchung ist wie folgt strukturiert.

In Kapitel 2 wird zunächst der theoretische und begriffliche Rahmen für alles Weitere bereitgestellt: Es werden Kategorien mit Dualität eingeführt, und die sich daraus ergebene L-Theorie dargestellt, sowie die nötigen Grundlagen der algebraischen K-Theorie diskutiert. Nachdem die von den Transformationsgruppen gelieferten Kategorien, speziell die Mackeykategorie, vorgestellt wurden, wird die abstrakte Theorie auf die Mackeykategorie angewendet.

Kapitel 3 enthält eine detaillierte Analyse des einfachsten nichttrivialen Spezialfalles, nämlich $G = \mathbb{Z}/p$, p eine Primzahl. Die verwendeten Methoden sind unabhängig von den folgenden Kapiteln. Die Mackeykategorie Ω_G beziehungsweise ein ihr zugeordneter Ring wird explizit ausgerechnet und durch Pullbacks in verständlichere Teile zerlegt. Mittels Mayer-Vietoris-Sequenzen für Pullbacks werden niedrige K-Gruppen berechnet.

Die Hauptarbeit wird nun in Kapitel 4 und 5 geleistet: In Kapitel 4 wird in der Kategorie die Gruppenordnung von G invertiert. Dies führt zu einer deutlichen Strukturvereinfachung, und es wird möglich, mittels Moritaäquivalenzen für alle Gruppen G Zerfällungsresultate für die K- und L-Gruppen zu erreichen.

In Kapitel 5 wird eine analoge Technik angewendet, nämlich die Komplettierung entlang der Gruppenordnung $|G|$. In diesem Fall liefert die Reduktion nach dem Radikal zumindest für p-Gruppen analoge Zerfällungsresultate.

In Kapitel 6 werden die Resultate der vorherigen 2 Kapitel in die Maschine der Mayer-Vietoris-Sequenzen in der K- und L-Theorie eingegeben. Für p-Gruppen erlangt man ein vollständiges Zerlegungsresultat für die quadratischen L-Gruppen. Modulo 2-primärer Torsion ist dies für alle Gruppen richtig.

2 Grundlagen

2.1 Kategorien

Dieser Abschnitt enthält lediglich eine Zusammenstellung der kategoriellen Begriffe und Konstruktionen, die später benötigt werden.

Im Folgenden seien alle Kategorien klein, bis auf die offensichtlichen Ausnahmen, z. B. die Kategorie KAT der kleinen Kategorien, oder die Kategorie MENGEN der Mengen. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heiße endlich, wenn ihre Objektmenge $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ endlich ist. Die opponierte Kategorie zu $\mathcal{C}$ wird mit $\mathcal{C}^{op}$ bezeichnet.

Sei R ein Ring (worunter wir immer einen Ring mit 1 verstehen). Eine Kategorie $\mathcal{C}$ wird *R-(links-)additiv* genannt, falls die Morphismenmengen in $\mathcal{C}$ R-Linksmoduln und die Verkettungen in $\mathcal{C}$ R-bilineare Abbildungen sind. Eine $\mathbb{Z}$-additive Kategorie heißt schlicht *additiv*. Häufig wird der Bequemlichkeit halber noch gefordert, daß alle endlichen Koprodukte existieren (die in einer additiven Kategorie automatisch auch Produkte sind, siehe [Bass] S.22); wir werden den Standpunkt einnehmen, daß, wann immer Koprodukte von nöten sind, alles in $\mathcal{C}_{\amalg}$, der *universellen Kategorie mit Koprodukt* zu $\mathcal{C}$, stattfindet. Ein Modell für $\mathcal{C}_{\amalg}$ wird durch folgende Konstruktion geliefert: Objekte in $\mathcal{C}_{\amalg}$ seien Abbildungen $f : X \to \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, X eine endliche Menge. Ein Morphismus von $f : X \to \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ nach $g : Y \to \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ sei eine Abbildung $a : X \to Y$, zusammen mit Morphismen $a_x : f(x) \to g(a(x))$ in $\mathcal{C}$ für alle $x \in X$. $\mathcal{C}_{\amalg}$ ist offenbar mit allen endlichen Koprodukten ausgestattet und kommt zusammen mit einem vollen, treuen Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\amalg}$, $x \mapsto (\{x\} \ni x \mapsto x)$. Ist $\mathcal{C}$ R-additiv, so auch $\mathcal{C}_{\amalg}$. In der Tat repräsentiert $\mathcal{C}_{\amalg}$ den Funktor (Kategorien mit Koprodukten) $\to$ MENGEN, $\mathcal{D} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{KAT}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$. Anders gesagt: Der Funktor $?_{\amalg}$ ist linksadjungiert zum Inklusionsfunktor (Kategorien mit Koprodukt)$\to$ KAT.

Eine Kategorie heißt *abelsch*, falls sie additiv ist, alle endlichen Koprodukte sowie alle Kerne und Kokerne besitzt, und das “1. Isomorphiegesetz der Algebra” gilt (d. h. die kanonische natürliche Transformation kokernokern =: kobild $\to$ bild := kernokokern ist ein Isomorphismus).

Zwischen den additiven und den abelschen liegen die *Karoubischen* Kategorien. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Karoubisch, falls sie additiv ist, und alle ihre Idempotente spalten, d. h. für jeden Idempotent $e : x \to x$ existiert ein $y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ und Morphismen $x \xrightarrow{p} y \xrightarrow{q} x$ mit $pq = \mathrm{id}_y$ und $qp = e$. Jede Kategorie $\mathcal{C}$ besitzt einen projektiven Abschluß $\mathbb{P}\mathcal{C}$, in dem alle Idempotente spalten: Objekte in $\mathbb{P}\mathcal{C}$ seien die Idempotente in C, und Morphismen zwischen $e : x \to x$ und $f : y \to y$ seien Morphismen $\psi : x \to y$ in $\mathcal{C}$ so daß $f \circ \psi = \psi \circ e$. Man überzeugt sich leicht, daß in $\mathbb{P}\mathcal{C}$ tatsächlich alle Idempotente spalten. $\mathbb{P}\mathcal{C}$ kommt einher mit einem vollen, treuen Funktor $\mathcal{C} \to \mathbb{P}\mathcal{C}$, $x \mapsto \mathrm{id}_x$. Ist $\mathcal{C}$ R-additiv, so auch $\mathbb{P}\mathcal{C}$. Wiederum repräsentiert $\mathbb{P}\mathcal{C}$ den Funktor (Karoubische Kategorien) $\to$ MENGEN, $\mathcal{D} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{KAT}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, und der Funktor $\mathbb{P}?$ ist linksadjungiert zum entsprechenden Inklusionsfunktor.

Eine weitere Verallgemeinerung der abelschen Kategorien sind die *exakten* Katego-