Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, für den jeder Untervektorraum $U \subset V$ invariant ist. Folgern Sie, dass f eine Homothetie ist, also $f = \lambda \operatorname{id}_V$ für ein Skalar $\lambda \in K$.

Aufgabe 2. Sei A eine reelle 2×2-Matrix mit

$$\operatorname{tr}(A)^2 > 4 \det(A).$$

Zeigen Sie, dass es genau vier A-invariante Unterräume $U \subset \mathbb{R}^2$ gibt.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f, g : V \to V$ zwei kommutierende Endomorphismen, also

$$f \circ g = g \circ f.$$

Zeigen Sie, dass jeder Eigenraum von f ein invarianter Unterraum für g ist. Folgern Sie, dass g diagonalisierbar ist, falls $|\sigma(f)| = n$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wieviele von den p^2 Begleitmatrizen

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$$

sind trigonalisierbar? Wieviele sind sogar diagonalisierbar?

Abgabe: Bis Donnerstag, den 25. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.