Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 1

Aufgabe 1. Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat die quadratische Gleichung

$$X^2 + tX + 2t - 3 = 0$$

eine reelle Lösung? Wann gibt es genau eine solche Lösung?

Aufgabe 2. Beweisen Sie durch Widerspruch, dass die ganze Zahl $p = 3$ keine Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist, analog zur Vorlesung.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Lösen von algebraischen Gleichungen

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 = 0$$

vom Grad $n \geq 1$ durch eine *Tschirnhaus-Transformation* $X = Y - a_{n-1}/n$ auf das Lösen von Gleichungen der Form

$$Y^n + b_{n-2}Y^{n-2} + \ldots + b_1Y + b_0 = 0$$

reduziert wird, in Analogie zum Spezialfall von quadratischen Gleichungen.

Aufgabe 4. Seien a, b, a', b' vier Dinge. Verifizieren Sie, dass die Gleichheit

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$$

von Mengen genau dann gilt, wenn $a = a'$ und $b = b'$. Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle $a = b$ und $a \neq b$.

Abgabe: Bis Montag, den 23. Oktober um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Hinweis zur gesamten Lehrveranstaltung: Bild- und Tonaufnahmen sowie die unautorisierte Verbreitung von Vorlesungsmitschriften insbesondere im Internet sind aus urheberrechtlichen und didaktischen Gründen nicht gestattet.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben. Es ist eine vorzügliche Idee, kleine Arbeitsgruppen zur Bearbeitung der Aufgaben zu bilden.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *korrekten und vollständigen deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass „A genau dann gilt, wenn B gilt", müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A, dann B" sowie „wenn B, dann A" zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage „wenn A, dann B" ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht".
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, schreiben Sie beispielsweise: „Wegen Vorlesung, Proposition 3.12 gilt..."
10. Alle Abgaben müssen *handschriftlich*, individuell, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!

Die Korrektoren sind angewiesen, bei Nichtbeachtung von Hinweis 4 pro Aufgabe einen Punkt abzuziehen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Für alle Teilmengen $B, B' \subset Y$ gilt $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

(ii) Für alle Teilmengen $A, A' \subset X$ gilt $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

(iii) Für alle $A \subset X$ und $B \subset Y$ gilt $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

(iv) Die Produktmenge $\varnothing \times Y$ ist für jede Menge Y leer.

(v) Ist die Abbildung $f : X \to Y$ nicht injektiv, so gilt $\mathrm{Card}(X) \geq 2$.

Aufgabe 2. Bei ihrem Bäcker kaufen Sie vier Dinkel- und drei Roggenbrötchen und bezahlen dafür 5,25 Euro. Am nächsten Wochenende wählen Sie zwei Dinkel- und fünf Roggenbrötchen und bezahlen 4,55 Euro. Bestimmen Sie die Einzelpreise der Brötchen.

Aufgabe 3. Sei $S = \{\varphi : X \to X\}$ die Menge aller Selbstabbildungen der Menge $X = \{1, 2, 3\}$. Wir betrachten nun die Abbilungen $f : S \to S$, welche durch die Vorschriften

$$f(\varphi)(x) = \varphi(\varphi(x))$$

definiert ist.

(i) Verifizieren Sie, dass die Menge S aus 27 Elementen besteht. Davon sind 6 Elemente $\varphi : X \to X$ bijektive Abbildungen.

(ii) Zeigen Sie, dass $f : S \to S$ weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 4. Sei S eine Menge, versehen mit einer Verknüpfung

$$S \times S \longrightarrow S, \quad (a, b) \longmapsto a * b.$$

Angenommen, es gibt ein neutrales Element $e \in S$. Weiterhin gelte

$$(a * c) * (b * d) = (a * b) * (c * d)$$

für alle $a, b, c, d \in S$. Deduzieren Sie durch geschickte Spezialsierungen, dass S ein kommutativer Monoid sein muss.

Abgabe: Bis Montag, den 30. Oktober um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungstermine: Erste Klausur am Mittwoch, 7. Februar 2024 von 12:00 bis 14:00 Uhr. Zweite Klausur am Dienstag, 26. März 2024 von 09:00 bis 11:00 Uhr.

Zulassungsvoraussetzung für Studierende im Fach Mathematik: Erreichen von 40% = 12 x 20 x 0,4 = 96 Punkten bei den Aufgabenblättern. Die Teilnahme an den Übungsgruppen wird durch Anwesenheitslisten erhoben. Hatten Sie in der Vergangenheit an einer Prüfung zur Linearen Algebra I ohne Erfolg teilgenommen, sind Sie ebenfalls zugelassen.

Für Studierende anderer Fächer: Erreichen von 32% = 0,8 x 40% der Punkte bei den Aufgabenblättern (80%-Regel), das entspricht 77 Punkten. Hatten Sie in der Vergangenheit die Zulassung für eine Prüfung zur Linearen Algebra I erreicht, sind Sie ebenfalls zugelassen.

Das griechische Alphabet

Buchstabe		Name	Transliteration
α	A	Alpha	a
β	B	Beta	b
γ	Γ	Gamma	g
δ, ∂	Δ	Delta	d
ϵ	E	Epsilon	e
ζ	Z	Zeta	z
η	H	Eta	ē
θ, ϑ	Θ	Theta	t
ι	I	Iota	i
κ	K	Kappa	k
λ	Λ	Lambda	l
μ	M	Mu	m
ν	N	Nu	n
ξ	Ξ	Xi	x
o	O	Omikron	o
π	Π	Pi	p
ρ	P	Rho	r
σ	Σ	Sigma	s
τ	T	Tau	t
υ	Υ	Upsilon	u
ϕ, φ	Φ	Phi	ph
χ	X	Chi	kh
ψ	Ψ	Psi	ps
ω	Ω	Omega	ō

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1. (i) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in cartesischen Koordinaten:

$$(5-i)^{-1}, \quad \frac{1+2i}{3+4i}, \quad (1+i)^3.$$

(ii) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten an:

$$\overline{i-1}, \quad i^{1000}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für jede der folgenden Bedingungen die resultierenden Mengen von komplexen Zahlen $z = x + iy = re^{i\varphi}$ und skizzieren sie diese in der Anschauungsebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(i) $\bar{z} = -z$;

(ii) $\bar{z} = z^{-1}$;

(iii) $z^5 = 1$;

(iv) $\mathrm{Re}(iz + 2) \geq 0$;

(v) $z^2 - (6+3i)z + (7+9i) = 0$.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen und statten die vierelementige Menge $R = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ mit den Verknüpfungen

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb', ab' + ba' + bb')$$

aus. Verifizieren sie im Detail, dass die Ringaxiome gelten, und entscheiden Sie, ob R ein Körper ist.

Aufgabe 4. Sei $R = \{0, 1, a\}$ ein assoziativer Ring mit genau drei Elementen. Beweisen Sie, dass dann

$$1 + a = 0, \quad a^2 = 1 \quad \text{und} \quad 1 + 1 = a$$

gilt, und stellen Sie die Additions- und Multiplikationstafeln auf.

Abgabe: Bis Montag, den 6. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die Primzahlen $3 \leqslant p \leqslant 13$, welche Kongruenzklassen

$$[a] \in \mathbb{F}_p^\times, \quad 0 < a < p$$

Quadrate sind. Was fällt Ihnen bezüglich der Anzahl der Quadrate auf?

Aufgabe 2. Finden Sie eine quadratische Gleichung

$$aX^2 + bX + c = 0,$$

mit ganzahligen Koeffizienten, die im Körper $K = \mathbb{F}_{11}$ genau zwei Lösung hat, aber im Körper $K' = \mathbb{F}_{13}$ keine hat. Geben Sie auch die Lösungen in K an.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die beiden ganzen Zahlen

$$a = \text{Ihre Matrikelnummer}, \quad b = \text{Ihr Geburtsjahr}.$$

Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $g = \mathrm{ggT}(a, b)$, und finden Sie eine Darstellung $g = ma + nb$.

Aufgabe 4. Ermitteln Sie im Ring $R = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, ob die Kongruenzklassen

$$u = [54] \quad \text{und} \quad v = [21]$$

Einheiten sind, und finden Sie gegebenenfalls das Inverse.

Abgabe: Bis Montag, den 13. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Welche der fünf Teilmengen

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y,z) \mid x<0\}, \\ U_2 &= \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}, \\ U_3 &= \{(x,y,z) \mid 2x+3y=-z\}, \\ U_4 &= \{(x,y,z) \mid x-y\in\mathbb{Q}\}, \\ U_5 &= \{(t,3t,-t) \mid t\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

des Anschauungsraumes $V=\mathbb{R}^3$ sind reelle Untervektorräume?

Aufgabe 2. (i) Sei $V=\mathbb{C}[T]$ der Vektorraum aller komplexen Polynome $P(T)=\lambda_n T^n+\ldots+\lambda_0$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U=\{P \mid P(e^{\pi i/2}T)=P(T) \text{ und } \deg(P)\leqslant 3\}$$

ein Untervektorraum ist.

(ii) Sei $V=\prod_{n=0}^{\infty}\mathbb{C}$ der Vektorraum aller komplexen Folgen $(z_n)_{n\geq 0}$. Verifizieren Sie, dass die Teilmenge

$$U=\{(z_n)_{n\geq 0} \mid \forall\epsilon>0\,\exists n_0\geq 0 \text{ mit } |z_n|<\epsilon \text{ für alle } n\geq n_0\}$$

aller Nullfolgen ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 zwei Untervektorräume. Beweisen Sie, dass die Vereinigungsmenge $U_1\cup U_2$ ein Untervektorraum ist genau dann, wenn $U_1\subset U_2$ oder $U_2\subset U_1$.

Aufgabe 4. Wir betrachten den Standardvektorraum $V=K^2$ über einem endlichen Primkörper $K=\mathbb{F}_p$. Wieviele Vektoren $a\in V$ gibt es? Wieviele Geraden $L=Ka$, $a\neq 0$ sind in V vorhanden? Tipp: Verschiedene Vektoren können die gleiche Gerade liefern.

Abgabe: Bis Montag, den 20. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 1. Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ werden die beiden Vektoren

$$a = (1, -2) \quad \text{und} \quad b_t = (t^2, 3t - 1)$$

in der Anschaungsebene $V = \mathbb{R}^2$ linear abhängig? Lösen Sie die Aufgabe zunächst in einem Spezialfall, indem Sie für t einen konkrete Wert ihrer Wahl einsetzen.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathbb{R}[X]$ der reelle Vektorraum aller Polynome, $P = P(X)$ ein nicht-konstantes Polynom, und $P' = P'(X)$ seine Ableitung. Zeigen Sie, dass die Vektoren $P, P' \in V$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. Sei $V = \mathscr{C}([0, 2\pi])$ der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Wir fassen die trigonometrischen Funktionen

$$x \longmapsto \cos(x) \quad \text{und} \quad x \longmapsto \sin(x)$$

als Vektoren $\cos, \sin \in V$ auf. Zeigen Sie, dass diese beiden Vektoren linear unabhängig sind. Tipp: Benutzen Sie Nullstellen der trigonometrischen Funktionen.

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Basis. Sei weiterhin $z = x + iy$ eine komplexe Zahlen, dessen Imaginärteil nicht verschwinden. Beweisen Sie, dass die $2n$ Vektoren

$$a_1, za_1, a_2, za_2, \ldots, a_n, za_n$$

eine Basis von V bilden, wobei wir nun V als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen. Was besagt das für $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ und $\dim_{\mathbb{C}}(V)$?

Abgabe: Bis Montag, den 27. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1. Bringen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & 14 & 37 & -33 \\ -1 & 3 & -2 & 7 & -3 \\ 2 & -6 & -6 & -22 & 18 \\ 5 & -15 & 15 & -31 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 5}(\mathbb{Q}).$$

mit dem Gauß-Algorithmus auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form, und geben Sie eine Basis für die Lösungmenge $U \subset \mathbb{Q}^5$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems an.

Aufgabe 2. Wir betrachten die ganzzahlige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie A mit dem Gauß-Algorithmus über dem Körper $K = \mathbb{Q}$ in reduzierte Zeilen-Stufen-Form. Wiederholen Sie dies mit einem anderen Pivot-Element im ersten Schritt.

Aufgabe 3. Wir betrachten eine 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ über einem Körper K, mit entsprechendem homogenem linearen Gleichungssytem

$$aX + bY = 0 \quad \text{und} \quad cX + dY = 0.$$

Angenommen, es gilt $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie mit dem Gauß-Algorithmus: Der Nullvektor ist die einzige Lösung.

Aufgabe 4. Sei $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$ ein homogenes lineares Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten. Wir betrachten die resultierenden Lösungsmengen

$$U \subset \mathbb{Q}^n \quad \text{und} \quad U_p \subset \mathbb{F}_p^n$$

über dem Körper der rationalen Zahlen beziehungweise den endlichen Primkörpern. Zeigen Sie mit dem Gauß-Algorithmus, dass

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(U_p) = \dim_{\mathbb{Q}}(U)$$

für fast alle Primzahlen $p > 0$ gilt. Tipp: Benutzen Sie, dass jede ganze Zahl nur endlich viele Primteiler hat.

Abgabe: Bis Montag, den 4. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. Wir betrachten die Vektoren

$$a = (1, 2, 2, 0) \quad \text{und} \quad b = (3, 0, 10, 2) \quad \text{und} \quad c = (1, 2, 4, 1)$$

aus dem Standardvektorraum $V = \mathbb{Q}^4$. Entscheiden Sie mit dem Gauß-Algorithmus, ob die Vektoren $a, b, c \in V$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2. Wir betrachten den 4-dimensionalen Vektorraum $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Die folgenden vier Vorschriften

$$f_1\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} b & d \\ a & b-a \end{smallmatrix}\right), \quad f_2\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a^2 & b \\ c & d^2 \end{smallmatrix}\right), \quad f_3\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2b & 3a \\ 4c & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad f_4\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \bar{c} & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$$

liefern Abbildungen $f_i : V \to V$. Welche davon sind linear?

Aufgabe 3. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung zwischen K-Vektorräumen und

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in V\} \subset V \times W$$

ihr Graph. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \to W$ linear ist genau dann, wenn die Teilmenge $\Gamma_f \subset V \times W$ ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{R}[T]$ der Untervektorraum aller Polynome

$$P = P(T) = \lambda_4 T^4 + \lambda_3 T^3 + \ldots + \lambda_0$$

vom Grad höchstens vier. Wir betrachten die Abbildung

$$f : U \longrightarrow U, \quad P \longmapsto P' - T^2 P''.$$

wobei P' und P'' die erste bzw. zweite Ableitung bezeichne.

(i) Verifizieren Sie, dass die Abbildung f linear ist.

(ii) Wählen Sie eine Basis $P_0, \ldots, P_m \in U$ und bestimmen Sie somit die Dimension $n = m + 1$ von U.

(iii) Stellen Sie die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ von f bezüglich dieser Basis auf.

Abgabe: Bis Montag, den 11. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1. Wir betrachten die Abbildung

$$\det : \mathrm{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc.$$

(i) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Abbildung die Addition nicht respektiert, also kein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist.

(ii) Verifizieren Sie, dass die Abbildung jedoch ein Homomorphismus von multiplikativen Monoiden ist, also

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \text{und} \quad \det(E) = 1.$$

Aufgabe 2. Wir betrachten die bijektive lineare Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Mat}_n(K) \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(K), \quad A \longmapsto {}^tA,$$

welche $A = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ auf die *transponierte Matrix* ${}^tA = (\alpha_{ji})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ schickt.

(i) Bestimmen Sie für $n = 2$ die Matrix von Ψ bezüglich der Standardbasis-Matrizen $E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2}$ aus $\mathrm{Mat}_2(K)$.

(ii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Abbildung Ψ für $n \geq 2$ die Matrizenmultiplikation nicht respektiert.

(iii) Verifizieren Sie, dass jedoch gilt:

$$\Psi(A \cdot B) = \Psi(B) \cdot \Psi(A) \quad \text{und} \quad \Psi(E) = 1.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten nun die Linearform

$$\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_n(K) \longrightarrow K, \quad (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii},$$

welche eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ auf ihre *Spur* $\mathrm{tr}(A) \in K$ schickt.

(i) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Spurabbildung die Multiplikation im Allgemeinen nicht respektiert.

(ii) Verifizieren Sie die Formel $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum und $V^{**} = (V^*)^*$ sein *Bidualraum*. Wir betrachten die *kanonische* Abbildung

$$f : V \longrightarrow V^{**}, \quad x \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x)).$$

Hierbei ist $x \in V$ ein Vektor und $\varphi \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ eine Linearform.

(i) Verifizieren Sie, dass die Abbildung f linear ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(iii) Folgern Sie, dass f für endlich-dimensionale Vektorräume V sogar ein Isomorphismus ist.

Abgabe: Bis Montag, den 18. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $\omega = \sqrt{2}$. Verifizieren Sie mit dem Gauß-Algorithmus, dass die reelle 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2\omega & 2-2\omega & 3+15\omega \\ 2 & -2 & 9 \\ 0 & \omega & 6 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie im Matrizenprodukt $A \cdot A^{-1}$ zwei Einträge Ihrer Wahl explizit ausrechnen.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \geq 0$. Wir betrachten den vierdimensionalen Vektorraum $V = \operatorname{Mat}_2(K)$ und den Transponierungs-Automorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in K$ sowie zugehörige Eigenvektoren $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Unterscheiden Sie dabei den Fall $p \neq 2$ sowie $p = 2$.

Aufgabe 3. Sei $V \neq 0$ und $f \in \operatorname{End}_K(V)$ ein *nilpotenter* Endomorphismus, also $f^r = 0$ für ein $r \geq 0$. Zeigen Sie, dass das Spektrum $\sigma(f) \subset K$ nur aus dem Eigenwert $\lambda = 0$ besteht. Folgern Sie, dass $f : V \to V$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn es die Nullabbildung ist.

Aufgabe 4. Benutzten Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$, um ganzzahlige Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$$

mit den jeweiligen Eigenschaften zu finden:

(i) Die Matrix ist über $K = \mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar, wohl aber über dem Körper $L = \mathbb{R}$.

(ii) Die Matrix ist über $K = \mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, wohl aber über dem Körper $L = \mathbb{C}$.

(iii) Die Matrix ist über $K = \mathbb{C}$ nicht diagonalisierbar, wohl aber über dem Körper $L = \mathbb{F}_2$.

Abgabe: Bis Montag, den 8. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut WS 23/24
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_2(K)$ diagonalisierbar. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Die Summe $A + B$ ist diagonalisierbar.

(ii) Das Produkt $A \cdot B$ ist diagonalisierbar.

(iii) Die Potenzen A^n, $n \geq 0$ sind diagonalisierbar.

Aufgabe 2. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine 2×2-Matrix über dem Körper K.

(i) Verifizieren Sie für $K = \mathbb{R}$ und A *symmetrisch*, also $c = b$, dass A diagonalisierbar ist.

(ii) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dies für den Körper $K = \mathbb{C}$ nicht mehr stimmt.

(iii) Beweisen Sie für $K = \mathbb{C}$ und A *hermitesch*, also $a, d \in \mathbb{R}$ und $c = \bar{b}$, dass A diagonalisierbar sein muss.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass die Potenzen

$$\mathrm{id}_V, f, f^2, \ldots, f^{n^2} \in \mathrm{End}_K(V)$$

linear abhängig sein müssen. Folgern Sie, dass es ein nicht-verschwindendes Polynom $P(T) = \sum_{i=0}^r \alpha_i T^i$ gibt so, dass $P(f) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f^i$ die Nullabbildung ist.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V endlich-dimensional ist genau dann, wenn jede aufsteigende Kette

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

von Untervektorräumen *stationär* ist, also $U_r = U_{r+1} = \dots$ für ein $r \geq 0$.

Abgabe: Bis Montag, den 15. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $n \geq 2$. Berechnen Sie mittels der Definition

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

das Signum der Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix} \in S_n.$$

Aufgabe 2. Benutzen Sie die Jägerzaun-Regel, um den linearen Term im charakteristischen Polynom $\chi_A(T) = \det(TE - A)$ zur 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 3. Wie betrachten die ganzzahlige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 4 & 9 & -2 \\ 12 & 32 & -5 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$, indem Sie durch Probieren eine Wurzel des charakteristischen Polynoms $\chi_A(T)$ finden und dann Polynomdivision durchführen.

(ii) Entscheiden Sie mit den geometrischen Multiplizitäten $m_\lambda \geq 1$ der Eigenwerte, ob $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \geq 0$, und $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ der Vektorraum aller 2×2-Matrizen. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad B \longmapsto {}^tB,$$

welcher die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ auf die transponierte Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ schickt.

(i) Beschreiben Sie $f \in \mathrm{End}_K(V)$ durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$.

(ii) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$.

(iii) Bestimmen Sie die geometrischen Multiplizitäten und folgern Sie, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $p \neq 2$.

Abgabe: Bis Montag, den 22. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Erlaubtes Hilfsmittel bei den Klausuren: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 1. Bestimmen Sie mit der Determinante, für welche Parameter $x \in \mathbb{R}$ die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x-1 & 2 & x \\ -2x+2 & x+1 & -2x+2 \\ -x+1 & 4x+18 & -x+9 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten die *Bandmatrizen*

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q}).$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion und Laplace-Entwicklung, dass

$$\det(A_n) = (-1)^n(n+1).$$

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine reelle Matrix, aufgefasst als komplexe Matrix. Verifizieren Sie mit dem charakteristischen Polynom, dass mit jedem komplexen Eigenwert $z = x + iy$ auch die konjugierte Zahl $\bar{z} = x - iy$ ein komplexer Eigenwert ist.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ eine ganzzahlige Matrix. Benutzen Sie die Determinante um zu zeigen: Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ ist invertierbar genau dann, wenn $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ für eine Primzahl $p > 0$ invertierbar ist. In diesem Fall ist es sogar über unendlich vielen $\mathbb{F}_p$ inverierbar.

Abgabe: entfällt. Dieses Blatt wird nicht korrigiert und geht nicht in die Wertung ein.