Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 1

Aufgabe 1. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale in einem Ring R. Angenommen, keins der beiden ist in dem anderen enthalten. Verifizieren Sie, dass weder $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ noch $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ prim sein können.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\mathfrak{m}_\lambda$, $\lambda \in L$ die Familie der maximalen Ideale. Beweisen Sie, dass die Einheitengruppe $R^\times$ das Komplement der Vereinigungsmenge $\bigcup_{\lambda \in L} \mathfrak{m}_\lambda$ ist.

Aufgabe 3. Seien $A = R_1 \times R_2$ das Produkt von zwei Ringen. Zeigen Sie, dass jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ von der Form $\mathfrak{p}_1 \times R_2$ oder $R_1 \times \mathfrak{p}_2$ mit einem Primideal $\mathfrak{p}_1 \subset R_1$ beziehungsweise $\mathfrak{p}_2 \subset R_2$ ist. Folgern Sie daraus, dass die Menge $\operatorname{Spec}(A)$ die disjunkte Vereinigung $\operatorname{Spec}(R_1) \cup \operatorname{Spec}(R_2)$ ist.

Aufgabe 4. Sei $R \subset A$ eine Ringerweiterung. Wir betrachten den R-Modul A/R. Das *Annulatorideal*

$$\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_R(A/R) = \{f \in R \mid f \cdot A/R = 0\}$$

wird auch als *Konduktorideal* bezeichnet. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(i) Die Teilmenge $\mathfrak{c} \subset R$ ist ein Ideal im Ring R.

(ii) Aufgefasst als Teilmenge in A ist $\mathfrak{c}$ auch ein Ideal im Ring A.

(iii) Das Konduktorideal ist das größte Ideal in R, dass zugleich Ideal in A ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 23. April um 23:59 Uhr über ILIAS.

Die Lösungen müssen handschriftlich und individuell sein und in Form einer einzigen pdf-Datei vorliegen, mit der Bezeichnung `NameVorname--Abgabe01.pdf` beim ersten Blatt. Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen vor- und nachbesprochen. Es gibt keine Korrekturen, daher werden auch keine Punkte vergeben.

Quorum: Um zur mündlichen Prüfung zugelassen zu werden, müssen sie insgesamt 8 mathematisch sinnvolle Abgaben gemacht haben.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Beschreiben Sie das Spektrum $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[T]$ als topologischen Raum durch Konjugationsklassen $\{z, \bar{z}\}$ komplexer Zahlen, und geben Sie zu jedem Punkt $x \in X$ den Restekörper $\kappa(x)$ an.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale.

(i) Verifizieren Sie die Gleichheit beziehungsweise die Inklusion

$$\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \supset \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

(ii) Geben Sie in dem faktoriellen Ring $R = \mathbb{C}[x, y]$ zwei Hauptideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ an mit der Eigenschaft $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \neq \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper und $R = k[T_1, T_2, \ldots]$ der Polynomring in unendlich vielen Unbestimmten. Sei $X = \operatorname{Spec}(R)$, und $a \in X$ der abgeschlossene Punkt zum maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (T_1, T_2, \ldots)$. Zeigen Sie, dass die komplementäre offenen Menge

$$U = D(T_1) \cup D(T_2) \cup \ldots$$

nicht quasikompakt ist.

Aufgabe 4. Sei X ein kompakter topologischer Raum und $\mathscr{C}(X)$ der Ring der stetigen Funktionen. Beweisen Sie, dass jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathscr{C}(X)$ in genau einem maximalen Ideal enthalten ist. Leiten Sie dafür aus der Annahme $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_a \cap \mathfrak{m}_b$ mit $a \neq b$ aus X einen Widerspruch her, indem Sie mithilfe der Formel

$$\max(|f| - |g|, 0) \cdot \min(|f| - |g|, 0) = 0,$$

deduzieren, dass auch das Ideal $\mathfrak{m}_a \cap \mathfrak{m}_b$ prim sein muss. Skizzieren Sie den topologischen Raum $\operatorname{Spec} \mathscr{C}(X)$.

Abgabe: Bis Freitag, den 30. April um 23:59 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei $X = \mathrm{Spec}(R)$ das Spektrum eines Ringes. Verifizieren Sie, dass jede endliche Menge $Z = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von abgeschlossenen Punkte $a_i \in X$ die diskrete Topologie trägt.

Aufgabe 2. Sei $\varphi : R \to A$ ein Homomorphismus von Ringen,

$$f : X = \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R) = Y$$

die induzierte stetige Abbildung, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $Z = V(\mathfrak{a})$ die resultierende abgeschlossene Menge in X.

(i) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Bildmenge $f(Z) \subset Y$ im allgemeinen nicht abgeschlossen ist.

(ii) Was ist das Radikalideal $\mathfrak{b} \subset R$ zur abgeschlossenen Menge $\overline{f(Z)} \subset Y$?

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, A ein R-Algebra, und A_λ, $\lambda \in L$ die Familie der Unterringe von der Form $R[a_1, \ldots, a_r] \subset A$, wobei $r \geq 0$ und $a_1, \ldots, a_r \in A$ endlich viele Ringelemente sind. Die Inklusionen $A_\lambda \subset A$ induzieren eine Abbildung

$$\mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \prod_{\lambda \in L} \mathrm{Spec}(A_\lambda).$$

Beweisen Sie, dass diese Abbildung eine Einbettung ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper. Sei E ein k-Vektorraum und E^* sein Dualraum. Wir bezeichnen mit $T^i(E) = E \otimes \ldots \otimes E$ das i-fache Tensorprodukt, und mit $T^\bullet(E) = \bigoplus_{i \geq 0} T^i(E)$ die *Tensoralgebra*. Der Quotient $\mathrm{Sym}^\bullet(E)$ nach dem zweiseitigem Ideal, das von den Tensoren $u \otimes v - v \otimes u$ zu den Vektoren u, v aus $T^1(E) = E$ erzeugt wird, heißt *symmetrische Algebra*. Zeigen Sie, dass

$$(k\text{-Vec}) \longrightarrow (\mathrm{Top}), \quad E \longmapsto \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}^\bullet(E^*))$$

ein kovarianter Funktor von der Kategorie der k-Vektorräume E in die Kategorie der topologischen Räume X ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 6. Mai um 23:59 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, und R_λ, $\lambda \in L$ die Familie der noetherschen Unterringe. Zeigen Sie mit dem Hilbertschen Basissatz, dass $R = \bigcup_{\lambda \in L} R_\lambda$.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper, A eine endlich erzeugte k-Algebra, $X = \operatorname{Spec}(A)$ das Spektrum. Sei $f \in A$ ein Ringelement mit $f(x) = 0$ im Restekörper $\kappa(x)$ für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$. Folgern Sie mit dem Hilbertschen Nullstellensatz, dass f nilpotent ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper, $\varphi : R \to A$ ein Homomorphismus zwischen endlich erzeugten k-Algebren, und

$$f : X = \operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R) = Y$$

die induzierte stetige Abbildung. Beweisen Sie mit dem Nullstellensatz, dass für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ das Bild $f(x) \in Y$ ebenfalls abgeschlossen ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper, $S \in \operatorname{Mat}_n(k)$ eine Matrix, $A = k[S]$ die von S erzeugte Unteralgebra, und $X = \operatorname{Spec}(A)$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte $\lambda \in k$ der Matrix den Punkten $x \in X$ mit Restekörper $\kappa(x) = k$ entsprechen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 13. Mai um 23:59 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei R ein lokaler Ring und $X = \operatorname{Spec}(R)$ sein Spektrum. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) X ist nicht-leer;

(ii) X ist irreduzibel;

(iii) X ist zusammenhängend;

(iv) X ist quasikompakt;

(v) X ist noethersch.

Aufgabe 2. Sei X ein noetherscher Raum, der zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass es eine endliche Folge von irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_n$ gibt, in der Wiederholungen erlaubt sind, wobei $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ sowie $X_i \cap X_{i+1} \neq \varnothing$ für $0 \leq i \leq n-1$ gilt.

Aufgabe 3. Sei X ein beliebiger topologischer Raum,

$$X^{\text{sob}} = \{x_Z \mid Z \subset X \text{ abgeschlossen und irreduzibel}\}$$

seine Sobrifizierung, und $f : X \to X^{\text{sob}}$ die kanonische Abbildung. Verifizieren Sie, dass das Bild $f(X)$ kolmogoroffsch ist, und dass die Zuordnung $X \mapsto X^{\text{sob}}$ funktoriell ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Beweisen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$, welches maximal unter allen nicht-endlich erzeugten Idealen $\mathfrak{a} \subset R$ ist, prim sein muss. Nehmen Sie dazu an, dass $fg \in \mathfrak{p}$ aber $f, g \notin \mathfrak{p}$, und betrachten Sie die Ideale

$$\mathfrak{p} + Rf \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} + Rg \quad \text{und} \quad \mathfrak{c} = \{a \in R \mid af \in \mathfrak{p}\}$$

sowie $(f) \cdot \mathfrak{c} = (f) \cap \mathfrak{p}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 27. Mai um 23:59 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $e \in R$ ein *idempotentes Element*, das heißt $e^2 = e$. Wir betrachten das multiplikative System $S = \{e^n \mid n \geq 0\}$ und das Hauptideal $\mathfrak{a} = (1-e)$.

(i) Rechnen Sie nach, dass $e' = 1 - e$ ebenfalls idempotent ist, mit $e \cdot e' = 0$.

(ii) Verifizieren Sie, dass im topologischen Raum $X = \operatorname{Spec}(R)$ die offenen Menge $U = D(e)$ mit der abgeschlossenen Menge $Z = V(e')$ übereinstimmt.

(iii) Definieren Sie zueinander inverse Abbildungen

$$S^{-1}R \longrightarrow R/\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad R/\mathfrak{a} \longrightarrow S^{-1}R,$$

indem Sie die universelle Eigenschaft der Lokalisierung beziehungsweise des Restklassenrings ausnutzen.

Aufgabe 2. Wir betrachten die zyklische Gruppe $M = \mathbb{Z}/63\mathbb{Z}$ als Modul über dem Ring $R = \mathbb{Z}$. Berechenen Sie für jede Primzahl $\ell > 0$ die Lokalisierung

$$M_\ell = \{\frac{a}{\ell^n} \mid a \in M \text{ und } n \geq 0\}.$$

Schreiben Sie dazu M als Summe von zyklischen p-Gruppen.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, $S \subset R$ ein multiplikatives System, und $\mathfrak{p}_\lambda \subset R$, $\lambda \in L$ die Familie aller zu S disjunkten Primideale.

(i) Verifizieren Sie, dass die Teilmenge

$$\tilde{S} = \{f \in R \mid f \notin \mathfrak{p}_\lambda \text{ für alle } \lambda \in L\}$$

ein multiplikatives System in R ist, welches S enthält.

(ii) Zeigen Sie, dass die resultierende kanonische Abbildung

$$S^{-1}R \longrightarrow \tilde{S}^{-1}R, \quad a/f \longmapsto a/f$$

bijektiv ist.

Aufgabe 4. Seien $f_1, \ldots, f_r \in R$ endlich viele Ringelemente und $S \subset R$ das davon erzeugte multiplikative System. Zeigen Sie, dass die R-Algebra $A = S^{-1}R$ vom endlichen Typ ist, und tatsächlich als Restklassenring des Polynomrings $R[T]$ geschrieben werden kann.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 3. Juni um 23:59 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow R^{\oplus n_0} \longleftarrow R^{\oplus n_1} \longleftarrow R^{\oplus n_2} \longleftarrow \dots$$

gibt, für gewisse Exponenten $n_i \geq 0$.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

von R-Moduln, dessen Zeilen exakt sind. Wir bezeichnen die vertikalen Abbildungen mit $\varphi_i : M_i \to N_i$. Verifizieren Sie mit Diagrammjagd die folgende Form des Fünfer-Lemmas:

(i) Ist φ_1 surjektiv und sind φ_2, φ_4 injektiv, so ist auch φ_3 injektiv.

(ii) Ist φ_5 injektiv und sind φ_2, φ_4 surjektiv, so ist auch φ_3 surjektiv.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul, und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, dessen Elemente nilpotent sind. Angeneommen, es gilt $M/\mathfrak{a}M = 0$. Folgern Sie mit dem Nakayama-Lemma, dass $M = 0$.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Angenommen, es gibt eine offene Überdeckung

$$\operatorname{Spec}(R) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r)$$

so, dass die Lokalisierungen R_{f_i} noethersche Ringe sind. Beweisen Sie, dass R noethersch ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 17. Juni um 23:59 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Zeigen Sie mit dem Nakayama-Lemma, dass der Ring genau dann ein Körper ist, wenn R ein lokaler noetherscher Ring von Einbettungsdimension

$$\mathrm{edim}(R) = \dim_\kappa(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2) = 1$$

ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, $R_\mathfrak{p}$ der resultierende lokale Ring, und κ sein Restekörper. Zeigen Sie, dass die $R_\mathfrak{p}$-linearen Homomorphismus

$$\varphi : \kappa \longrightarrow R_\mathfrak{p}$$

den Elementen $a/f \in R_\mathfrak{p}$ entsprechen, welche vom maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ annulliert werden.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher Ring, und $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \subset R$ seine minimalen Primideale. Seien $R_i = R_{\mathfrak{p}_i}$ die resultierenden lokalen Ringe, und F_i deren Restekörper. Verifizieren Sie, dass die $\mathrm{Spec}(R_i)$ aus nur einem Punkt bestehen, und dass der Kern des resultierenden Homomorphismus

$$\varphi : R \longrightarrow F_1 \times \ldots \times F_r, \quad f \longmapsto (f/1 \bmod \mathfrak{m}_{R_i}, \ldots, f/1 \bmod \mathfrak{m}_{R_i})$$

das Nilradikal $\mathrm{Nil}(R)$ ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Zeigen Sie

$$\dim(R) = \sup\{\dim(R_\mathfrak{m})\} = \sup\{\dim(R/\mathfrak{p})\},$$

wobei die Suprema über die maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R$ beziehungsweise die minimalen Primideale $\mathfrak{p} \subset R$ verlaufen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 24. Juni um 23:59 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei k ein Körper, und $f, g \in k[x, y]$ zwei Polynome mit $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$. Zeigen Sie mit Krulls Hauptidealsatz, dass die Verschwindungsmenge

$$V(f, g) = V(f) \cap V(g)$$

in $X = \mathrm{Spec}(k[x, y])$ aus endlich vielen abgeschlossenen Punkten besteht.

Aufgabe 2. Sei R ein lokaler noetherscher Ring, mit Restekörper $\kappa = R/\mathfrak{m}_R$ und Einbettungsdimension

$$n = \mathrm{edim}(R) = \dim_\kappa(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2).$$

Sei $f \in \mathfrak{m}_R$ ein Element des maximalen Ideals, und $\bar{R} = R/fR$ der Restklassenring. Verifizieren Sie, dass

$$\mathrm{edim}(\bar{R}) = \begin{cases} n-1 & \text{wenn } f \notin \mathfrak{m}_R^2; \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3. Seien $m, n \geq 1$ zwei ganze Zahlen. Wir betrachten den Ring

$$R = k[x, y]/(x^m - y^n)$$

über einem Körper k. Verifizieren Sie $\dim(R) = 1$, und geben Sie eine explizite Inklusion $k[s] \subset R$ an so, dass R als Modul über $k[s]$ frei vom endlichen Rang ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper, R eine endlich erzeugte k-Algebra, und $f \in R$ ein Element, das in keinem der minimalen Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r \subset R$ enthalten ist. Beweisen Sie

$$\dim(R_f) = \dim(R).$$

Reduzieren Sie das Problem zunächst auf den Fall, dass R integer ist, indem Sie zu den Restklassenringen $R/\mathfrak{q}_i$ übergehen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 1. Juli um 23:59 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum. Verifizieren Sie, dass die lokal-konstanten Funktionen

$$f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

genau die Abbildungen sind, welche nach oben und nach unten halbstetig sind.

Aufgabe 2. Sei R ein integrer noetherscher Ring, $F = \mathrm{Frac}(R)$ der Körper der Brüche, und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass für gewisse Ringelemente $f \neq 0$ die Lokalisierung M_f ein freier Modul über R_f wird.

Aufgabe 3. Sei M ein lokal freier R-Modul vom endlichen Rang. Zeigen Sie, dass für jeden surjektiven Homomorphismus $\varphi : N_1 \to N_2$ die induzierte lineare Abbildung

$$\varphi_* : \mathrm{Hom}_R(M, N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N_2), \quad \psi \longmapsto \psi \circ \varphi$$

ebenfalls surjektiv ist.

Aufgabe 4. Sein R ein Ring, und M ein lokal freier R-Modul vom endlichen Rang. Beweisen Sie, dass die kanonische Abbildung

$$\varphi : M^\vee \otimes M \longrightarrow \mathrm{End}_R(M), \quad \psi \otimes a \longmapsto (x \mapsto \psi(x) \cdot a)$$

bijektiv ist, indem Sie bezüglich einer geeigneten offenen Überdeckung

$$\mathrm{Spec}(R) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r)$$

lokalisieren. Folgern Sie, dass in der Picard-Gruppe $\mathrm{Pic}(R)$ das Inverse durch $-[L] = [L^\vee]$ gegeben ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 8. Juli um 23:59 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, und $\mathscr{H}_X \subset \mathscr{C}_X^\infty \subset \mathscr{C}_X$ die Garben der holomorphen, differenzierbaren beziehungsweise stetigen $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen. Verifizieren Sie, dass $\mathrm{id}_X : X \to X$ zusammen mit den obige Inklusionen Morphismen

$$(X, \mathscr{C}_X) \longrightarrow (X, \mathscr{C}_X^\infty) \longrightarrow (X, \mathscr{H}_X)$$

von geringten Räumen liefern.

Aufgabe 2. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, und $\mathscr{F}$ eine Garbe auf X. Für die offenen Mengen $V \subset Y$ definieren wir

$$\Gamma(V, f_*(\mathscr{F})) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathscr{F}).$$

Machen Sie $f_*(\mathscr{F})$ zu einer Garbe auf Y, indem Sie in kanonischer Weise Einschränkungsabbildungen $\mathrm{res}_{V'}^V$ zu den Inklusionen $V' \subset V$ festlegen, und dann die Prägarbeneigenschaften sowie das Garbenaxiom verifizieren.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, L ein invertierbarer R-Modul, und

$$X = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r)$$

eine offene Überdeckung von $X = \mathrm{Spec}(R)$ so, dass es Basiselemente $a_i \in L_{f_i}$ gibt. Durch die Gleichung $a_i = \lambda_{ij} a_j$ werden damit Elemente $\lambda_{ij} \in R_{f_i f_j}^\times$ definiert. Zeigen Sie, dass dann

$$\lambda_{jk} \cdot \lambda_{ik}^{-1} \cdot \lambda_{ij} = 1$$

in der Lokalisierung $R_{f_i f_j f_k}$ gelten muss.

Aufgabe 4. Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein geringter Raum, und $s \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ ein globaler Schnitt. Angenommen, es gibt eine offenen Überdeckung $X = \bigcup U_\lambda$ so, dass die Einschränkungen $s_\lambda = s|U_\lambda$ invertierbar in $\Gamma(U_\lambda, \mathscr{O}_X)$ sind. Zeigen Sie, dass dann auch $s \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ invertierbar ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 15. Juli um 23:59 Uhr über ILIAS.