Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Verifizieren Sie durch explizites nachrechnen, dass die Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{c\lambda_0 + d\lambda_1}{a\lambda_0 + b\lambda_1}$$

eine Wirkung der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf der Riemannschen Zahlenkugel

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \{\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \mid \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \text{ verschwinden nicht gleichzeitig}\}$$

definiert. Interpretieren Sie diese Gruppenwirkung neu, indem Sie die Punkte von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ als 1-dimensionale Untervektorräume $L \subset \mathbb{C}^2$ deuten.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass obige Wirkung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ transitiv, aber nicht treu ist, und berechnen Sie für $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die Isotropiegruppe.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ein Element von Ordnung $n \geq 2$, das keine Skalarmatrix ist. Die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wirkt dann auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vermöge der Matrix A. Wieviele Fixpunkte gibt es?

Aufgabe 4. Betrachten den Standardvektorraum $X = \mathbb{R}^n$ für ein ganze Zahl $n \geq 1$. Wir definieren die *Alexandroff-Kompaktifizierung*

$$\overline{X} = X \cup \{\infty\},$$

wobei ∞ ein formales Symbol ist. Eine Teilmenge $U \subset \overline{X}$ nennt man *offen*, wenn sie entweder ∞ nicht enthält und in $\mathbb{R}^n$ offen ist, oder ∞ enthält und das Komplement $\overline{X} \smallsetminus U$ in $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.

(i) Verifizieren Sie, dass beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von offenen Menge in $\overline{X}$ wieder offen sind.

(ii) Beweisen Sie, dass $\overline{X}$ kompakt ist, also jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung erlaubt.

Abgabe: Bis Freitag, den 27. November um 23:55 Uhr über ILIAS.