Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $f(x, y)$ ein nicht-konstantes komplexes Polynom. Verifizieren mit dem Fundamentalsatz der Algebra, dass die resultierende algebraische Menge $X \subset \mathbb{C}^2$ nicht-leer ist.

Aufgabe 2. Sei $m \geq 1$. Wir fassen den Matrizenraum $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ als Standardvektorraum $\mathbb{C}^{m^2}$ auf. Entscheiden Sie mithilfe des charakteristischen Polynoms sowie von Minoren, welche der folgenden Mengen algebraisch sind:

(i) Die Menge der invertierbaren Matrizen.

(ii) Die Menge der nilpotenten Matrizen.

(iii) Die Menge der Matrizen vom Rang $r \leq 2$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die kleinste algebraische Menge $X \subset \mathbb{C}^2$, welche alle Punkte $a = (m, n)$ mit Koordinaten $m, n \in \mathbb{Z}$ enthält, bereits $X = \mathbb{C}^2$ ist.

Aufgabe 4. Sei $f_i(T_1, \ldots, T_n)$, $i \in I$ eine Familie von reellen Polynomen, und $X \subset \mathbb{R}^n$ die Menge aller Punkte, an denen all diese Polynome verschwinden. Beweisen Sie, dass X auch als Verschwindungsmenge eines einzigen Polynoms

$$g(T_1, \ldots, T_n) \in \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]$$

gedeutet werden kann. Tipp: Benutzen Sie Hilberts Basissatz sowie Quadrate.

Abgabe: Bis Freitag, den 6. November um 23:59 Uhr über ILIAS.

Die Lösungen müssen handschriftlich und individuell sein und in Form einer einzigen pdf-Datei vorliegen, mit der Bezeichnung `NameVorname--Abgabe01.pdf` beim ersten Blatt. Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen vor- und nachbesprochen. Es gibt keine Korrekturen, daher werden auch keine Punkte vergeben.

Quorum: Um zur mündlichen Prüfung zugelassen zu werden, müssen sie insgesamt 8 mathematisch sinnvolle Abgaben gemacht haben.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $X : f(x,y) = 0$ die ebene Kurve zu einem nicht-konstantem komplexen Polynom $f \in \mathbb{C}[x,y]$. Zeigen Sie, dass die algebraische Menge $X \subset \mathbb{C}^2$ nicht beschränkt ist, und nach dem Satz von Heine–Borel also nicht kompakt sein kann.

Aufgabe 2. Wir betrachten die ebene Kurve $X : y^n = f(x)$, wobei $f \in \mathbb{C}[x]$ ein separables Polynom vom Grad $d = 3$ ist. Zeigen Sie, dass eine Substitution

$$x = u^n x' + r \quad \text{und} \quad y = u^3 y'$$

mit geeigneten $u \in \mathbb{C}^\times$ und $r \in \mathbb{C}$ die algebraische Menge $X \subset \mathbb{C}^2$ in die algebraische Menge $Y : y^2 = x(x-1)(x-\tau)$ überführt wird, für eine komplexe Zahl $\tau \neq 0, 1$.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl, $f \in \mathbb{C}[x]$ separabel vom Grad $r \geq 1$, und $X : y^n = f(x)$ die resultierende ebene Kurve $X \subset \mathbb{C}^2$.

(i) Verifizieren Sie mit dem Eisenstein-Kriterium, dass $g(x,y) = y^n - f(x)$ im Ring $R = \mathbb{C}[x,y]$ irreduzibel ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $g(x,y)$ im Ring $A = \mathbb{C}[[x]][y]$ reduzibel wird genau dann, wenn $f(x)$ keine Nullstelle bei $x = 0$ hat.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Wir definieren auf der Gruppe $R = k \oplus V$ die Multiplikation

$$(\lambda, v) \cdot (\mu, w) = (\lambda\mu, \lambda w + \mu v).$$

Verifizieren Sie, dass dies eine Ringstruktur liefert, indem Sie R als Restklassenring eines Polynomrings $k[T_i]_{i \in I}$ deuten. Zeigen Sie weiterhin, dass R noethersch ist genau dann, wenn $\dim_k(V) < \infty$.

Abgabe: Bis Freitag, den 13. November um 23:55 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal mit der Eigenschaft $\mathfrak{a}^2 = 0$. Zeigen Sie, dass der Kern der zwischen den multiplikativen Gruppen induzierten Abbildung $R^\times \to (R/\mathfrak{a})^\times$ die Menge

$$1 + \mathfrak{a} = \{1 + f \mid f \in \mathfrak{a}\}$$

ist, und das dies als abelsche Gruppe isomorph zum Kern $\mathfrak{a}$ der Restklassenabbildung $R \to R/\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 2. Verifizieren Sie die Identität

$$\sum_{i+j=n} \binom{r}{i}\binom{r}{j} = \binom{2r}{n}$$

für beliebige Elemente r einer $\mathbb{Q}$-Algebra R, indem Sie beide Seiten als Polynome in r mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ deuten und deren Nullstellen betrachten. Deduzieren Sie daraus

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} x^i$$

im Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{Q}[[x]]$, indem Sie das Quadrat der rechten Seite berechnen.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Körper $F = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{C}((x^{1/n}))$ der formalen Puiseux-Reihen

$$f(x) = \sum_{i \geq -m} \lambda_i x^{i/n}, \quad \text{wobei } m \geq 0 \text{ und } n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass jedes Polynom der Form $T^d - f(x)$ aus $F[T]$ in Linearfaktoren zerfällt. Folgern Sie mit der Galois-Korrespondenz, dass es keine abelschen Erweiterungen $F \subset E$ vom endlichen Grad $d > 1$ gibt.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper und x eine Unbestimmte. Eine formalen Ausdruck der Form

$$f(x) = \sum_{r \in \mathbb{R}} \lambda_r x^r$$

nennte man eine *Hahn-Reihe*, falls der Träger $\operatorname{Supp}(f) = \{r \in \mathbb{R} \mid \lambda_r \neq 0\}$ *wohlgeordnet* ist, also jede nicht-leere Teilmenge ein kleinstes Element enthält. Beweisen Sie, dass die Cauchy-Multiplikation für Hahn-Reihen wohldefiniert ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 20. November um 23:55 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Verifizieren Sie durch explizites nachrechnen, dass die Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{c\lambda_0 + d\lambda_1}{a\lambda_0 + b\lambda_1}$$

eine Wirkung der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf der Riemannschen Zahlenkugel

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \{\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \mid \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \text{ verschwinden nicht gleichzeitig}\}$$

definiert. Interpretieren Sie diese Gruppenwirkung neu, indem Sie die Punkte von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ als 1-dimensionale Untervektorräume $L \subset \mathbb{C}^2$ deuten.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass obige Wirkung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ transitiv, aber nicht treu ist, und berechnen Sie für $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die Isotropiegruppe.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ein Element von Ordnung $n \geq 2$, das keine Skalarmatrix ist. Die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wirkt dann auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vermöge der Matrix A. Wieviele Fixpunkte gibt es?

Aufgabe 4. Betrachten den Standardvektorraum $X = \mathbb{R}^n$ für ein ganze Zahl $n \geq 1$. Wir definieren die *Alexandroff-Kompaktifizierung*

$$\overline{X} = X \cup \{\infty\},$$

wobei ∞ ein formales Symbol ist. Eine Teilmenge $U \subset \overline{X}$ nennt man *offen*, wenn sie entweder ∞ nicht enthält und in $\mathbb{R}^n$ offen ist, oder ∞ enthält und das Komplement $\overline{X} \smallsetminus U$ in $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.

(i) Verifizieren Sie, dass beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von offenen Menge in $\overline{X}$ wieder offen sind.

(ii) Beweisen Sie, dass $\overline{X}$ kompakt ist, also jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung erlaubt.

Abgabe: Bis Freitag, den 27. November um 23:55 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathbb{C}[x,y]$ ein Quadrat-freies Polynom, mit irreduziblen Faktoren f_i, $1 \leq i \leq r$. Seien $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ die resultierenden ebenen Kurven im $\mathbb{C}^2$. Verifizieren Sie, dass

$$X_i \cap X_j \subset \mathrm{Sing}(X)$$

für alle $i \neq j$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie für die ebenen Kurven $X : f(x,y) = 0$ den singulären Ort $\mathrm{Sing}(X) \subset \mathbb{C}^2$, mit folgenden Polynomen $f(x,y)$:

$$x^2 + y^3, \quad x - xy^5, \quad x^2y^3 - x^3 - y^4 + xy.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass jede algebraische Menge $Z \subsetneqq \mathbb{C}^2$ die Vereinigung von endlich vielen ebenen Kurven $X_1, \ldots, X_r$ zu irreduziblen Polynomen und endlich vielen Punkten $a_1, \ldots, a_s$ ist.

Aufgabe 4. Eine Menge $U \subset \mathbb{C}^2$ nennt man *Zariski-offen*, wenn ihr Komplement $Z = \mathbb{C}^2 \smallsetminus U$ algebraisch ist.

(i) Zeigen Sie mit der vorangegangenen Aufgabe, dass die Kollektion aller Zariski-offenen Mengen U eine Topologie auf der Menge $\mathbb{C}^2$ bilden.

(ii) Verifizieren Sie, dass der resultierende topologische Raum $\mathbb{A}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2$ quasikompakt aber nicht haussdorfsch ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 4. Dezember um 23:55 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Wir betrachten die algebraische Menge

$$X : x^m - y^n = 0$$

zu relative primen Exponenten $m, n \geq 2$. Verifizieren Sie, dass $\operatorname{Sing}(X) \neq \varnothing$, und dass X trotzdem eine topologische 2-Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass die algebraische Menge $X : x^2 - y^2 = 0$ am Ursprung $a = (0,0)$ keine topologische 2-Mannigfaltigkeit ist, indem Sie die Zusammenhangs-Eigenschaften von punktierten Umgebungen $U \smallsetminus \{a\}$ betrachten.

Aufgabe 3. Die *Kleinsche Flasche* ist die kompakte zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit X zum Flächenwort $aba^{-1}b$.

(i) Berechnen Sie die Euler-Charakteristik $e(X)$ mittels Zellenzerlegung.

(ii) Bringen Sie $aba^{-1}b$ durch die in der Vorlesung angegebenen Umwandlungen in die Normalform x^2y^2.

(iii) Fertigen Sie im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ ein Bild von $X = P^2 \sharp P^2$ mit Selbstdurchdringung an.

Aufgabe 4. Sei $X : f(x,y) = 0$ eine ebene Kurve im $\mathbb{C}^2$ mit

$$f(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(0,0) \neq 0,$$

wobei wir $f' = \partial f / \partial y$ schreiben. Zeigen Sie mit dem Residuensatz, dass das Wegintegral

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\beta| = \epsilon} (\beta f'(\alpha, \beta)/f(\alpha,\beta))\, d\beta$$

für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ und $|\alpha|$ der impliziten Gleichung $f(\alpha, \psi(\alpha)) = 0$ genügt.

Abgabe: Bis Freitag, den 11. Dezember um 23:55 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine verzweigte Überlagerung vom Grad $n \geq 1$, wobei $X = S^2$ die 2-Sphäre und Y eine andere 2-Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie mit der Riemann–Hurwitz-Formel, dass $Y = S^2$ oder $Y = P^2$ gelten muss.

Aufgabe 2. Sei X eine kompakte orientierbare 2-Mannigfaltigkeit, und

$$f : X \longrightarrow Y$$

eine verzweigte Überlagerung von $Y = S^2$ vom Grad $n = 2$. Welche Beziehung zwischen der Anzahl $r \geq 0$ der Verzweigungspunkte von f und dem Geschlecht $g \geq 0$ von X liefert die Riemann–Hurwitz-Formel?

Aufgabe 3. Sei Y und X orientierbare, zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht g beziehungsweise $g+1$. Angenommen, es gibt eine verzweigte Überlagerung $f : X \to Y$ vom Grad $n \geq 1$, mit $r \geq 0$ Verzweigungspunkte. Folgern sie mit der Riemann–Hurwitz-Formel, dass dann

$$Y = S^2, \quad Y = T^2, \quad \text{oder} \quad Y = T^2 \sharp T^2$$

gelten muss. Deduzieren Sie für den dritten Fall weiterhin $n = 2$ und $r = 0$.

Aufgabe 4. Sei $f : X \to Y$ eine verzweigte Überlagerung mit kompakten 2-Mannigfaltigkeiten X und Y. Angenommen, Y ist orientierbar. Beweisen Sie, dass dann auch X orientierbar ist, indem sie Triangulierungen von Y baryzentrisch unterteilen und damit eine Triangulierung von X gewinnen.

Abgabe: Bis Freitag, den 18. Dezember um 23:55 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei k ein Körper und $k(t)$ der Körper der rationalen Funktionen. Wir betrachten das Element

$$x = \frac{t}{t^2+1} + \frac{t^3-1}{t}.$$

Verifizieren Sie explizit, dass $x \in k(t)$ transzendent über k ist, und bestimmen Sie den Grad der endlichen Körpererweiterung $k(x) \subset k(t)$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die j-Invarianten für die komplexen Strukturen auf dem Torus $X = T^2$, welche durch die folgenden beiden Gleichungen gegeben werden:

$$y^2 = x^3 + 2x^2 - 3x \quad \text{and} \quad y^2 = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (\lambda_0 : \lambda_1) \longmapsto (\lambda_0^2 : \lambda_0\lambda_1 : \lambda_1^2)$$

eine wohldefinierte holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten liefert, indem Sie f vermöge der Karten als Abbildungen zwischen offenen Mengen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^2$ deuten.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Wirkung der Gruppe $G = \mathbb{C}^\times$ auf der komplexen 2-Mannigfaltigkeit $X = \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$, welche durch die Formel

$$\alpha \cdot (\lambda_0, \lambda_1) = (\alpha^{-1}\lambda_0, \alpha\lambda_1)$$

gegeben ist. Beweisen Sie, dass der Bahnenraum X/G versehen mit der Quotiententopologie nicht hausdorffsch ist. Verdeutlichen Sie dies mit einer Skizze des reellen Bildes.

Abgabe: Bis Freitag, den 8. Januar um 23:55 Uhr über ILIAS.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei k ein Körper, $f \in k[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Polynom, F_j seien Dehomogenisierung bezüglich der Unbestimmten T_j, und $r \neq j$ ein weiterer Index. Verifizieren sie, dass die partielle Ableitung $\partial F_j/\partial x_r$ die entsprechende Dehomogenisierung von $\partial f/\partial T_r$ ist. Hierbei schreiben wir $x_i = T_i/T_j$.

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geq 2$. Überprüfen Sie, dass die durch die partiellen Ableitungen

$$\partial f/\partial T_1 = \ldots = \partial f/\partial T_n = 0$$

definierte algebraische Menge $Z \subset \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ den Ursprung $0 \in \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ enthält.

Aufgabe 3. Zum homogenen Polynom $f = T_0^2 + T_1T_2$ betrachten wir die Hyperfläche

$$X = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, dass auf den Karten $U_j = D_+(T_j)$ diese Hyperfläche zu Kopien von $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ oder $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$ wird.

Aufgabe 4. Wir betrachten nun zum homogenen Polynom $g = T_1^2 + T_2^2$ die Hyperfläche

$$Y = V_+(g) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Beweisen Sie, dass der topologische Raum Y die Vereinigung von zwei Kopien der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$ ist, die sich in einem Punkt berühren.

Abgabe: Bis Freitag, den 15. Januar um 23:55 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei k ein Körper von Charakteristik $p \neq 2$, und $f \in k[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d = 2$. Zeigen Sie wie zum Fall $k = \mathbb{C}$ aus der Vorlesung, dass es eine Matrix $(\sigma_{ij}) \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ mit

$$f(\sum \sigma_{0j}T_j, \ldots, \sum \sigma_{nj}T_j) = \gamma_0 T_0^2 + \ldots + \gamma_n T_n^2$$

gibt, für gewissen Skalare $\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in k$.

Aufgabe 2. Wie viele Bahnen hat die kanonische Wirkung von $G = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ auf dem Untervektorraum $V \subset \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_n]$ aller homogenen Polynome vom Grad $d = 2$?

Aufgabe 3. Sei $X = V_+(f)$ die Verschwindungsmenge in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ zu einem homogenen Polynom $f \in \mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]$ vom Grad $d = 2$. Angenommen, die partiellen Ableitungen $\partial f/\partial T_i$ haben nur den Ursprung $0 \in \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ als gemeinsame Nullstelle. Zeigen Sie, dass der Schnitt $X \cap L$ mit jeder Geraden

$$L = V_+(\alpha_0 T_0 + \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)$$

aus einem oder zwei Punkten besteht.

Aufgabe 4. Sei $X = V_+(f)$ die Verschwindungsmenge in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ zu einem homogenen Polynom $f \in \mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]$ vom Grad $d = 2$. Angenommen, die partiellen Ableitungen $\partial f/\partial T_i$ haben nur den Ursprung $0 \in \mathbb{A}^4(\mathbb{C})$ als gemeinsame Nullstelle. Konstruieren Sie eine Bijektion

$$s : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow X \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C}).$$

Reduzieren Sie dafür das Problem zunächst auf $f = T_0T_1 - T_2T_3$.

Abgabe: Bis Freitag, den 22. Januar um 23:55 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut WS 20/21
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei V ein ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, und V', V'' zwei Untervektorräume. Angenommen, die entsprechenden linearen Unterräume

$$X' = \mathbb{P}(V') \quad \text{und} \quad X'' = \mathbb{P}(V'')$$

in $\mathbb{P}(V)$ sind disjunkt. Folgern Sie, dass die kanonische Abbildung $V' \oplus V'' \to V$ injektiv ist.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, und $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ sein Dualraum. Zeigen sie, dass die komplexen Mannigfaltigkeiten

$$\mathbb{P}(V) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(V^*)$$

in *unkanonischer* Weise isomorph sind, dass jedoch die Punkte in $\mathbb{P}(V^*)$ *kanonisch* den Hyperebenen in $\mathbb{P}(V)$ entsprechen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jedes komplexe homogene Polynom $f(T_0, T_1) \neq 0$ geschrieben werden kann als

$$f(T_0, T_1) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i T_0 - \beta_i T_1)^{\nu_i}$$

mit eindeutig bestimmtem $r \geq 1$, Punkten $(\alpha_i : \beta_i) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, und Exponenten $\nu_i \geq 1$.

Aufgabe 4. Sei $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eine Hyperfläche, und $H_1, \ldots, H_{n-1} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ Hyperebenen. Beweisen Sie, dass der Durchschnitt

$$X \cap H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}$$

nicht-leer ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 29. Januar um 23:55 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 12

Aufgabe 1. Seien $f, g \in R[T]$ zwei Polynome vom Grad $m \geq 0$ bzw. $n \geq 0$, sowie $\lambda \in R$. Verifizieren Sie

$$\operatorname{res}(f, g) = (-1)^{mn} \operatorname{res}(g, f) \quad \text{and} \quad \operatorname{res}(\lambda f, g) = \lambda^n \operatorname{res}(f, g).$$

Aufgabe 2. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $a, b \geq 1$ und $R = \mathbb{C}[x]$. Berechnen Sie die Diskriminante $\operatorname{dis}(f) \in R$ für das Polynom

$$f(T) = (T^a - \lambda - x)(T^b - \mu - x),$$

indem Sie das Polynom in einem geeigneten Oberring von R in Linearfaktoren zerlegen.

Aufgabe 3. Berechnen Sie für kubische Polynome der Form $f = T^3 + rT + s$ die Diskriminante

$$\operatorname{dis}(f) = -\operatorname{res}(f, f')$$

als Determinante der 5×5-Matrix $M(f, f')$ aus.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $f, g \in R[T]$ zwei Polynome. Angenommen, für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ haben die induzierten Polynome

$$\bar{f}, \bar{g} \in \Omega[T]$$

in $\Omega = (R/\mathfrak{m})^{\text{alg}}$ keine gemeinsame Nullstellen. Folgern Sie, dass die Resultante $\operatorname{res}(f, g) \in R$ eine Einheit ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 5. Februar um 23:55 Uhr über ILIAS.