Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Erste Klausur am 2. Februar 2019

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher oder elektronische Geräte bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei V ein komplexer Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ eine Linearform. Es bezeichne $\bar{f}$ die Verkettung von $f : V \to \mathbb{C}$ mit der komplexen Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren

$$f, \bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$$

genau dann $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind, wenn $f \neq 0$. Hierbei fassen wir V und $\mathbb{C}$ als reelle Vektorräume auf.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $n \geq 9$ eine natürliche Zahl, $U \subset K^n$ ein 6-dimensionaler Untervektorraum, und $V \subset \mathrm{Mat}_3(K)$ der Untervektorraum aller symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass es eine surjektive lineare Abbildung

$$f : K^n \longrightarrow \mathrm{Mat}_3(K)$$

gibt mit der Eigenschaft $f(U) = V$.

Aufgabe 3. Wir betrachten die 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie eine Basis für den Vektorraum

$$U = \{B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q}) \mid BA = AB\}.$$

aller mit A kommutierenden Matrizen.

Aufgabe 4. Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_7)$$

das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$ sowie das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{F}_7$, und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5. Seien $f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ drei reelle Funktionen. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} f(t) & f(t)g(t) & 2t^2 - 4t + 3 \\ 1 & g(t) & 0 \\ 0 & 1 & h(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist, und bestimmen Sie das Inverse A^{-1}. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie den $(1,2)$-Eintrag des Matrizenprodukts $A \cdot A^{-1}$ ausrechnen.