Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 1

Aufgabe 1. Drücken Sie die Diskriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ der quadratischen Gleichung

$$(uX - r)(vX - s) = 0$$

als Quadrat durch die Zahlen u, v, r, s aus.

Aufgabe 2. Seien a, b, x, y vier Dinge. Verifizieren Sie, dass die Gleichheit von Mengen

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

genau dann gilt, wenn $a = x$ und $b = y$. Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle $a = b$ und $a \neq b$, und beachten Sie, dass zwei Implikationen/Inklusionen zu zeigen sind.

Aufgabe 3. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Für alle Teilmengen $B, B' \subset Y$ gilt $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

(ii) Für alle Teilmengen $A, A' \subset X$ gilt $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

(iii) Für alle $A \subset X$ und $B \subset Y$ gilt $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

(iv) Die Produktmenge $\varnothing \times Y$ ist für jede Menge Y leer.

(v) Ist die Abbildung $f : X \to Y$ nicht injektiv, so gilt $\mathrm{Card}(X) \geq 2$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die reelle Zahl $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ keine rationale Zahl ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 24. Oktober um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei S ein Monoid. Zeigen Sie, dass es höchstens ein Element $n \in S$ gibt mit der Eigenschaft

$$n * a = n = a * n$$

für alle $a \in S$. Geben Sie ein Beispiel S_1 für einen Monoiden, der ein solches Element enthält, und ein Beispiel S_2, wo dieses nicht existiert.

Aufgabe 2. Sei S eine Menge, versehen mit einer Verknüpfung

$$S \times S \longrightarrow S, \quad (a, b) \longmapsto a * b.$$

Angenommen, es gibt ein neutrales Element $e \in S$. Weiterhin gelte

$$(a * c) * (b * d) = (a * b) * (c * d)$$

für alle $a, b, c, d \in S$. Deduzieren Sie daraus, dass S ein kommutativer Monoid sein muss.

Aufgabe 3. Sei $R = \mathscr{P}(X)$ die Potenzmenge zu einer Menge X, also die Gesamtheit aller Teilmengen $U \subset X$. Wir definieren auf R eine Addition

$$U + V = (U \cup V) \smallsetminus (U \cap V)$$

sowie eine Multiplikation

$$U \cdot V = U \cap V.$$

Verifizieren Sie, dass R mit diesen Verknüpfungen zu einem Ring wird.

Aufgabe 4. Sei $R = \{0, 1, a\}$ ein assoziativer Ring mit genau drei Elementen. Beweisen Sie, dass dann

$$1 + a = 0, \quad a^2 = 1 \quad \text{und} \quad 1 + 1 = a$$

gilt, und stellen Sie die Additions- und Multiplikationstafeln auf.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 31. Oktober um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungstermine: Erste Klausur am Samstag, den 2. Februar 2019 von 09:00–11:00 Uhr. Zweite Klausur am Freitag, den 29. März 2019 von 12:00–14:00 Uhr.

Zulassungsvoraussetzung für Studierende im Fach Mathematik: Erreichen von 40% = 12 x 20 x 0,4 = 96 Punkten bei den Aufgabenblättern. Die Teilnahme an den Übungsgruppen wird durch Anwesenheitslisten erhoben. Die Zulassungsvoraussetzungen für Studierende anderer Fächer entnehmen Sie der Homepage[1].

Das griechische Alphabet

Buchstabe		Name	Transliteration
α	A	Alpha	a
β	B	Beta	b
γ	Γ	Gamma	g
δ, ∂	Δ	Delta	d
ϵ	E	Epsilon	e
ζ	Z	Zeta	z
η	H	Eta	ē
θ, ϑ	Θ	Theta	t
ι	I	Iota	i
κ	K	Kappa	k
λ	Λ	Lambda	l
μ	M	Mu	m
ν	N	Nu	n
ξ	Ξ	Xi	x
o	O	Omikron	o
π	Π	Pi	p
ρ	P	Rho	r
σ	Σ	Sigma	s
τ	T	Tau	t
υ	Υ	Upsilon	u
ϕ, φ	Φ	Phi	ph
χ	X	Chi	kh
ψ	Ψ	Psi	ps
ω	Ω	Omega	ō

[1] http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~schroeer/18_ws_LineareAlgebra_I/LAI_ws18.html

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1. (i) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in cartesischen Koordinaten:

$$(5-i)^{-1}, \quad \frac{1+2i}{3+4i}, \quad (1+i)^3.$$

(ii) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten an:

$$\overline{i-1}, \quad 1/e^{i\varphi} \quad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für jede der folgenden Bedingungen die resultierenden Mengen von komplexen Zahlen $z = x + iy = re^{i\varphi}$ und skizzieren sie diese in der Anschauungsebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(i) $\bar{z} = -z$;

(ii) $\bar{z} = z^{-1}$;

(iii) $z^5 = 1$;

(iv) $\mathrm{Re}(iz + 2) \geq 0$;

(v) $z^2 - (6 + 3i)z + (7 + 9i) = 0$.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die beiden ganzen Zahlen

$$a = \text{Ihre Matrikelnummer}, \quad b = \text{Ihr Geburtsjahr}.$$

Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $g = \mathrm{ggT}(a, b)$, und finden Sie eine Darstellung $g = ma + nb$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für die vier Primzahlen $5 \leqslant p \leqslant 13$, welche Kongruenzklassen

$$[a] \in \mathbb{F}_p^\times, \quad 0 < a < p$$

Quadrate sind, indem sie jeweils alle $[b]^2$, $0 < b < p$ berechnen. Was fällt Ihnen bezüglich der Anzahl der Quadrate auf?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 7. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 1. Welche der fünf Teilmengen

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y,z) \mid x < 0\}\,, \\ U_2 &= \{(x,y,z) \mid xy = z\}\,, \\ U_3 &= \{(x,y,z) \mid 2x + 3y = -z\}\,, \\ U_4 &= \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{Q}\}\,, \\ U_5 &= \{(t, 3t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

des Anschauungsraumes $V = \mathbb{R}^3$ sind reelle Untervektorräume?

Aufgabe 2. (i) Sei $V = \mathbb{C}[T]$ der Vektorraum aller komplexen Polynome $P(T) = \lambda_n T^n + \ldots + \lambda_0$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U = \{P \mid P(e^{\pi i}T) = P(T) \text{ und } \deg(P) \leqslant 3\}$$

ein Untervektorraum ist.

(ii) Sei $V = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U = \{f \mid \exists c \geq 0 \text{ mit } f(x) = 0 \text{ falls } |x| \geq c\ \}$$

ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $n \geq 0$. Wir betrachten den Standardvektorraum $V = K^{n+1}$ über dem endlichen Primkörper $K = \mathbb{F}_p$. .

(i) Verifizieren Sie, dass es $p - 1$ nicht-verschwindende Skalare $\lambda \in K$ und $p^{n+1} - 1$ nicht-verschwindende Vektoren $a \in V$ gibt.

(ii) Schließen Sie, dass es $p^n + p^{n-1} + \ldots + p + 1$ Geraden $L \subset V$ gibt, also Untervektorräume der Form $L = Ka$ mit $a \neq 0$.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ zwei Untervektorräume mit $U_1 \not\subset U_2$ und $U_2 \not\subset U_1$. Beweisen Sie, dass die Vereinigungsmenge $U_1 \cup U_2 \subset V$ kein Untervektorraum ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ werden die beiden Vektoren

$$a = (1, -2) \quad \text{und} \quad b_t = (t^2, 3t - 1)$$

in der Anschauungsebene $V = \mathbb{R}^2$ linear abhängig? Betrachten Sie dabei zunächst die Spezialfälle $t = 0$ und $t = 1$.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir fassen die trigonometrischen Funktionen

$$x \longmapsto \cos(x) \quad \text{und} \quad x \longmapsto \sin(x)$$

als Vektoren $\cos, \sin \in V$ auf. Zeigen Sie durch Betrachtung von Nullstellen, dass diese beiden Vektoren linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. Sei $K = \mathbb{F}_p$ ein endlicher Primkörper. Wie viele Basen $a_1, \ldots, a_n$ im Standardvektorraum $V = K^n$ gibt es? Betrachten Sie dabei zunächst die Spezialfälle $n = 1$ und $n = 2$. Nutzen Sie für den allgemeinen Fall die Bedingung $a_j \notin \sum_{i<j} K a_i$ aus.

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Basis. Seien weiterhin $z_1, \ldots, z_n$ komplexe Zahlen, deren Imaginärteile nicht verschwinden. Beweisen Sie, dass die $2n$ Vektoren

$$a_1, z_1 a_1, a_2, z_2 a_2 \ldots, a_n, z_n a_n \in V$$

eine Basis von V bilden, wobei wir nun V als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen. Was besagt das über die Beziehung zwischen $\dim_{\mathbb{C}}(V)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(V)$?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 21. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $H_1 \neq H_2$ zwei Untervektorräume von Dimension $\dim(H_i) = n - 1$. Zeigen Sie mit der Dimensionsformel, dass

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$$

gilt. Geben Sie dafür ein explizites Beispiel im Anschauungsraum $V = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Für welche Skalare $\lambda, \mu \in K$ bilden die Vektoren

$$a = (\lambda, \mu) \quad \text{und} \quad b = (\mu, \lambda)$$

eine Basis des Standardvektorraumes $V = K^2$?

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subset V$ ein r-dimensionaler Untervektorraum. Beweisen Sie mit Basisergänzungssatz, dass es eine Folge von Untervektorräumen

$$U = U_r \subsetneqq U_{r+1} \subsetneqq \ldots \subsetneqq U_n = V$$

gibt. Zeigen Sie weiterhin, dass es zwischen den U_s und U_{s+1} keine Untervektorräume $W \neq U_s, U_{s+1}$ gibt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $V = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen unendlich-dimensional ist, indem sie eine explizite Folge $f_1, f_2, \ldots$ von linear unabhängigen stetigen Funktionen angeben.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 28. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $V \subset \mathbb{R}[T]$ der Untervektorraum aller Polynome vom Grad $\deg(P) \leqslant 3$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow V, \quad P \longmapsto P' - P''.$$

Hierbei ist $P'(T)$ die Ableitung des Polynoms $P(T)$.

(i) Stellen Sie die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ der linearen Abbildung bezüglich der Monombasis $T^0, \ldots, T^3 \in V$ auf.

(ii) Welches Polynom $P(T) \in V$ entspricht dem Bild von $(1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ unter der linearen Abbildung?

(iii) Finden Sie einen nicht-trivialen Vektor aus dem Kern der linearen Abbildung.

Aufgabe 2. Sei $V \subset \mathscr{C}(\mathbb{R})$ der von den beiden trigonometrischen Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ erzeugte zwei-dimensionale Untervektorraum. Stellen Sie die Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{m\times 2}(\mathbb{R})$ bezüglich der Basis $\cos, \sin \in V$ zu den folgenden fünf linearen Abbildung auf:

(i) Die zwei linearen Abbildung $V \to V$, gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) \longmapsto f'(x) \quad \text{und} \quad f(x) \longmapsto f(x + \pi).$$

(ii) Die beiden Linearformen $V \to \mathbb{R}$ mit

$$f \longmapsto f(\pi) \quad \text{und} \quad f \longmapsto \int_0^{\pi/2} f(x)dx.$$

(iii) Die lineare Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f \longmapsto (f(\pi/2), \int_0^{\pi} f(x)dx, f(0)).$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jeder Untervektorraum $U \subset K^n$ des Standardvektorraumes die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

ist, indem Sie geeignete Basen wählen und lineare Abbildungen bilden.

Aufgabe 4. Sei V, W zwei Vektorräume, $f : V \to W$ eine Abbildung, und

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in V \text{ und } y = f(x)\}$$

ihr Graph. Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : V \to W$ linear ist genau dann, wenn die Teilmenge $\Gamma_f \subset V \times W$ ein Untervektorraum ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 5. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. Bringen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

mit dem Gauß-Algorithmus auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form. Wenden Sie den Algorithmus ein zweites Mal an, wobei Sie zu Beginn ein anderes Pivotelement wählen.

Aufgabe 2. Berechnen Sie zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 14 & 29 & -30 \\ -1 & 3 & -2 & 7 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -18 & 16 \\ 5 & -15 & 15 & -33 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 5}(\mathbb{Q})$$

mit dem Gauß-Algorithmus $\mathrm{rank}(A) \geq 0$ sowie eine Basis von $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathbb{Q}^5$.

Aufgabe 3. Finden Sie mit dem Gauß-Algorithmus ein homogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge aus den Bildern $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Q}^3$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -27 & -18 \\ -2 & 4 & -48 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Q})$$

besteht.

Aufgabe 4. Sei $A = (n_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit ganzzahligen Einträgen, aufgefasst als Element $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{Q})$. Für jedes Primzahl $p > 0$ sei

$$A_p = ([n_{ij}]) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F}_p)$$

die Matrix, deren Einträge die Kongruenzklassen von $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ modulo p sind. Beweisen Sie mithilfe des Gauß-Algorithmus, dass

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_p)$$

für fast alle Primzahlen $p > 0$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1. (i) Sind die Vektoren

$$z_1 = (3, 2, 11), \quad z_2 = (1, 1, 2), \quad z_3 = (9, 8, 6)$$

im Standardvektorraum $(\mathbb{F}_{17})^3$ linear unabhängig?

(ii) Wählen Sie aus den Vektoren

$$x_1 = (1, 3, 1), \quad x_2 = (2, 6, 2), \quad x_3 = (2, 10, 4), \quad x_4 = (0, 2, 1)$$

eine Basis der linearen Hülle $\sum_{i=1}^{4} \mathbb{Q}x_i \subset \mathbb{Q}^3$.

(iii) Schreiben Sie den Vektor $c = (1, i, -2) \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombination der Vektoren

$$y_1 = (1, 2, 0), \quad y_2 = (3, 8, 4), \quad y_3 = (1, 5, 7).$$

Aufgabe 2. Sei $r = \sqrt{2}$. Verifizieren Sie, dass die reelle 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2r & 2-2r & 3+15r \\ 2 & -2 & 9 \\ 0 & r & 6 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie zwei Einträge des Matrizenprodukts $A \cdot A^{-1}$ explizit ausrechnen.

Aufgabe 3. Wir betrachten die komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -2 & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}).$$

Sei $U \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ die Menge aller Matrizen B, welche mit A kommutieren.

(i) Verifizieren Sie, dass $U \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ ein Untervektorraum ist, indem Sie die Teilmenge als Kern einer lineare Abbildung deuten.

(ii) Berechnen Sie eine Basis für den Vektorraum U.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen, und $r = \mathrm{rank}(f)$. Beweisen Sie, dass es Basen $x_1, \ldots, x_n \in V$ und $y_1, \ldots, y_m \in W$ gibt so, dass die Matrix von f die Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei E die $r \times r$-Einheitsmatrix und die übrigen Blöcke Nullmatrizen sind.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_2(K)$. Rechnen Sie explizit nach, dass

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \text{und} \quad \det(E) = 1.$$

Folgern Sie daraus, dass ähnliche Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_2(K)$ die gleiche Determinante haben.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und λ, μ, α drei Skalare. Rechnen Sie explizit nach, dass die 2×2-Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

niemals ähnlich sind.

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathrm{Mat}_n(K)$ die Teilmenge aller symmetrischen Matrizen $A = (\lambda_{ij})$, also $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ für alle Indices $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

(i) Verifizieren Sie, dass diese Teilmenge ein Untervektorraum ist.

(ii) Bestimmen Sie $\dim_K(U)$, indem Sie eine Basis $A_1, A_2, \ldots$ für U angeben.

Aufgabe 4. Wie definieren auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ eine Relation: Schreibe $A \sim B$ wenn es ein $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt so, dass $B = SAT$.

(i) Verifizieren Sie, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

(ii) Zeigen Sie mithilfe des Rangs von Matrizen, dass es genau

$$d = \min(m, n) + 1$$

Äquivalenzklassen gibt, und wählen Sie aus jeder Klasse einen Representanten aus.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 9. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix und

$$\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid \exists a \in V \text{ mit } a \neq 0 \text{ und } f(a) = \lambda a\}$$

ihr Spektrum, also die Menge der Eigenwerte. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es gilt $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist.

(ii) Die Summe $a + b$ von zwei Eigenvektoren $a, b \in K^n$ ist ein Eigenvektor.

(iii) Sind λ, μ Eigenwerte von A, so ist das Produkt $\lambda\mu$ Eigenwert von A^2.

(iv) Ist A invertierbar und diagonalisierbar, so ist auch A^{-1} diagonalisierbar.

(v) Aus der Bedingung $A^n = 0$, $n \geq 1$ folgt die Gleichheit $\sigma(A) = \{0\}$.

Aufgabe 2. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine reelle 2×2-Matrix. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar aber keine Skalarmatrix ist genau dann, wenn

$$(a-d)^2 + 4bc > 0$$

gilt. Geben Sie dafür eine Formel für die Eigenwerte $\lambda \in K$ an. Benutzen Sie dabei die Diskriminante Δ des charakteristischen Polynoms $\chi_A(T)$.

Aufgabe 3. Sei $V = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen. Wir betrachten die Abbildung $A : V \to V$, welche eine Funktion $f(x)$ auf die Funktion $f(x+1)$ schickt. Zeigen Sie, dass das Spektrum dieses Endomorphismus durch

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \neq 0\}$$

gegeben ist. Verwenden Sie dabei die Expenonentialfunktion $\exp(x)$ sowie die trigononmetrische Funktion $\sin(x)$, um entsprechende Eigenvektoren zu konstruieren.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums über dem endlichen Primkörper $K = \mathbb{F}_{11}$. Angenommen, die dreifache Verkettung $f^3 = f \circ f \circ f$ ist die Identitätsabbildung id_V.

(i) Zeigen Sie, dass nur $\lambda = 1$ ein Eigenwert sein kann.

(ii) Folgern Sie, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f = \mathrm{id}_V$ gilt.

(iii) Konstruieren Sie ein nicht-diagonalisierbares Beispiel mit $V = (\mathbb{F}_{11})^2$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 16. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Die **erste Klausur** findet am Samstag, den 2. Februar 2019 von 9:00–11:00 Uhr statt. Nähere Informationen entnehmen sie der Homepage zur Vorlesung. Die **Anmeldung/Abmeldung** zu dieser Prüfung geschieht online über das Studierendenportal und ist bis Samstag, den 26. Januar möglich. Angemeldete Kandidaten, welche die **Zulassungsvorraussetzungen** nicht erfüllt haben, gelten als abgemeldet. Alle angemeldeten Kandidaten werden voraussichtlich am Dienstag, den 29. Januar im Studierendenportal über den **Zulassungsstatus** informiert.

Die **zweite Klausur** findet am Freitag, den 29. März 2019 von 12:00–14:00 Uhr statt. Anmeldung/Abmeldung ist bis Freitag, den 22. März möglich.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. (i) Bestimmen Sie den linearen Term im charakteristischen Polynom $\chi_A(T) = \det(TE - A)$ der allgemeinen 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix},$$

vermöge der Jägerzaunregel.

(ii) Berechnen Sie die Determinante der 4×4-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 93 & 85 & 594 & 6 \\ -4 & 3 & -21 & 1 \\ -15 & -14 & -96 & -1 \\ 53 & 22 & 320 & -2 \end{pmatrix}$$

durch geschickte Zeilen- und Spaltenoperationen. (Hinweis: Das Ergebnis ist eine einstellige Zahl.)

Aufgabe 2. Wie betrachten die komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 12 & 8 & -5 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$, indem Sie eine Wurzel vom charakteristischen Polynom $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$ erraten.

(ii) Berechnen Sie die geometrischen Multiplizitäten $m_\lambda > 0$ der Eigenwerte und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. Für welche Parameter $x \in \mathbb{R}$ ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x-1 & 2 & x \\ -2x+2 & x+1 & -2x+2 \\ -x+1 & 4x+18 & -x+9 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \geq 0$, und $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ der Vektorraum aller 2×2-Matrizen. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad B \longmapsto {}^tB,$$

welcher die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ auf die transponierte Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ schickt.

(i) Beschreiben Sie $f \in \mathrm{End}(V)$ durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$.

(ii) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T) \in K[T]$.

(iii) Beweisen Sie, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $p \neq 2$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 23. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Erlaubtes Hilfsmittel bei den Klausuren: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine reelle Matrix, aufgefasst als komplexe Matrix. Verifizieren Sie, dass mit jedem komplexen Eigenwert $z = x + iy$ auch die konjugierte Zahl $\bar{z} = x - iy$ ein komplexer Eigenwert ist.

Aufgabe 2. Sei $A = (\lambda_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, und $r \geq 0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $\mathrm{rank}(A) \geq r$ genau dann gilt, wenn es r-elementige Teilmengen

$$I \subset \{1, \ldots, m\} \quad \text{and} \quad J \subset \{1, \ldots, n\}$$

gibt so, dass $\det(B) \neq 0$ für die $r \times r$-Matrix $B = (\lambda_{ij})_{i\in I, j\in J}$ gilt.

Aufgabe 3. Wir betrachten die $n \times n$-Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion und Laplace-Entwicklung, dass

$$\det(A_n) = (-1)^n(n+1).$$

Aufgabe 4. Für welche Primzahlen $p > 0$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 1 \\ -10 & -10 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_p)$$

invertierbar? Wann ist sie diagonalisierbar?

Abgabe: entfällt. Dieses Blatt wird nicht korrigiert und geht nicht in die Wertung ein.

Hinweis zur gesamten Lehrveranstaltung: Bild- und Tonaufnahmen sowie die unautorisierte Verbreitung von Vorlesungsmitschriften insbesondere im Internet sind aus didaktischen und urheberrechtlichen Gründen nicht gestattet.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Sprechen* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *korrekten und vollständigen deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass „A genau dann gilt, wenn B gilt", müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A, dann B" sowie „wenn B, dann A" zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage „wenn A, dann B" ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht".
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, folgen Sie bitte der wissenschaftlichen Praxis und schreiben beispielsweise: „Wegen [Vorlesung], Proposition 3.12 gilt..."
10. Alle Abgaben müssen individuell, handschriftlich, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!

Die Korrektoren sind angewiesen, bei Nichtbeachtung von Hinweis 4 pro Aufgabe einen Punkt abzuziehen.