Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 18

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei Y eine Gorenstein-Fläche. Konstruieren Sie eine verzweigte Überlagerung $f : X \to Y$ vom Grad $n = 2$ mit $\omega_X = \mathscr{O}_X$.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie eine verzweigte Überlagerung $f : X \to \mathbb{P}^2$ vom Grad $n = 5$, welche genau sechs rationale Doppelpunkte vom Typ A_4 hat, und berechnen Sie die Invarianten K_X^2 sowie $h^1(\mathscr{O}_X)$ und $h^2(\mathscr{O}_X)$.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 5$. Konstruieren Sie eine minimale Fläche S vom allgemeinen Typ, die genau

$$(n-1)\binom{n}{2} = \frac{n^3 - 2n^2 + n}{2}$$

(-2)-Kurven $E \subset S$ enthält, indem sie verzweigte Überlagerungen von $\mathbb{P}^2$ verwenden.

Aufgabe 4. Sei $S = \mathbb{P}(\mathscr{E})$ eine Hirzebruch-Fläche mit Invariante $e \geq 0$, also $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(e)$. Seien $E = \mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(e))$ und $A = \mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1})$ die kanonischen Schnitte, und $F_1, \ldots, F_e \subset S$ paarweise verschiedene Fasern. Zeigen Sie, dass die Kurve

$$D = A + E + F_1 + \ldots + F_e$$

ein snc-Divisor ist, welcher in $\mathrm{Pic}(S)$ durch $n = 2$ teilbar ist, und berechnen Sie für die resultierende verzweigte Überlagerung $f : X \to S$ vom Grad $n = 2$ die beiden Invarianten K_X^2 und $\chi(\mathscr{O}_X)$.

Abgabe: Bis Freitag, den 22. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.