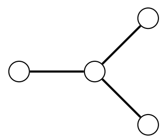
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 18

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ eine ADE-Kurve vom Typ D_4:



Zeigen Sie mit den Sequenzen $0 \to \mathscr{O}_{E_i}(-C) \to \mathscr{O}_{C+E_i} \to \mathscr{O}_C \to 0$, dass der Fundamentalzyklus $Z = 2E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ die Eigenschaft $h^1(\mathscr{O}_Z) = 0$ hat.

Aufgabe 2. Berechnen Sie durch Induktion nach $n \geq 1$ für die ADE-Kurven

$$E = E_1 + \ldots + E_n$$

vom Typ A_n und Typ D_n die Determinante der Schnittmatrix $\Phi = (E_i \cdot E_j)$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Aufblasung $X = \mathrm{Bl}_Z(\mathbb{A}^2)$ der affinen Ebene $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$, dessen Zentrum $Z \subset \mathbb{A}^2$ durch das Parameterideal $\mathfrak{a} = (x, y^2)$ gegeben ist. Welcher rationale Doppelpunkt tritt auf X auf?

Aufgabe 4. Wir betrachten die affine Fläche

$$V : \quad z^4 - xy = 0$$

im affinen Raum $\mathbb{A}^3 = \operatorname{Spec} k[x, y, z]$. Sei $b = (0, 0, 0)$ der Ursprung und $X = \mathrm{Bl}_b(V)$ die Aufblasung. Zeigen Sie, dass der exzeptionelle Divisor $E \subset X$ aus zwei Kopien der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1$ besteht, an deren Schnittpunkt $x \in X$ der lokale Ring $\mathscr{O}_{X,x}$ ein rationaler Doppelpunkt vom Typ A_1 ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 15. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.