Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 18

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $f : X \to S$ die Aufblasung des Ursprungs $z \in S$ auf der affinen Ebene $S = \mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$, mit exzeptionellem Divisor $E = f^{-1}(z)$. Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl und $Z = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{S,z}/\mathfrak{m}_z^n)$ das resultierende lokale Artin-Schema. Verifizieren Sie, dass die schematische Faser durch

$$X \times_S Z = f^{-1}(Z) = nE$$

gegeben ist. Berechnen sie auch das schematische Urbild $X \times_S C = f^{-1}(C)$ der singulären Kurve $C : y^2 = x^3$.

Aufgabe 2. Sei X eine reguläre Fläche und $f : X \to S$ ein minimales Modell. Angenommen, $S = \mathbb{P}(\mathscr{E})$ ist eine Regelfläche über eine Kurve B vom Geschlecht $g \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann jedes weitere minimale Modell S' eine Regelfäche $S' = \mathbb{P}(\mathscr{E}')$ über B ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten die lokal freie Garbe $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$ auf $\mathbb{P}^1$, mit gewissen ganzen Zahlen $a \leqslant b$. Welche Form

$$\mathscr{E}' = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a') \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b')$$

haben die elementaren Transformationen $\mathscr{E}'$ von $\mathscr{E}$?

Aufgabe 4. Sei S eine reguläre Fläche, und $E \subset S$ eine Kurve mit

$$E \simeq \mathbb{P}^1 \quad \text{und} \quad E^2 < 0.$$

Konstruieren Sie wie im Beweis des Castelnuovo-Kriteriums die Kontraktion $f : S \to X$ der negativ-definiten Kurve E.

Abgabe: Bis Freitag, den 8. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.