Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei X ein Schema und L ein Körper. Verifizieren Sie im Detail, dass die Morphismen von Schemata $f : \operatorname{Spec}(L) \to X$ den Paaren (a, ψ) entsprechen, wobei $a \in X$ ein Punkt und $\psi : \kappa(a) \to L$ ein Homomorphismus von Körpern ist.

Aufgabe 2. Sei X ein Schema. Zeigen Sie, dass es ein affines Schema X^{aff} und einen Morphismus

$$f : X \longrightarrow X^{\text{aff}}$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft gibt: Für jeden Ring R und jeden Morphismus $g : X \to \operatorname{Spec}(R)$ gibt es genau ein $h : X^{\text{aff}} \to \operatorname{Spec}(R)$ mit $g = h \circ f$.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper. Konstruieren Sie einen surjektiven Morphismus

$$f : \mathbb{A}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1,$$

indem sie die affine offenen Überdeckung $\mathbb{P}^1 = \operatorname{Spec} k[T] \cup \operatorname{Spec} k[1/T]$ verwenden.

Aufgabe 4. Sei k ein Grundkörper. Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Unterschemata

$$Z \subset \mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} k[x, y],$$

deren Träger der Ursprung $a = (0, 0)$ ist, und für den der k-Vektorraum $H^0(Z, \mathscr{O}_Z)$ von Dimension $d = 2$ ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 20. Oktober um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Zulassungsvoraussetzung zur mündlichen Prüfung: 40% = 96 Punkte der insgesamt 240 = 12 x 4 x 5 Punkte auf den zwölf Übungsblätter.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $X = \operatorname{Spec}(R)$ ein affines Schema. Verifizieren Sie, dass der Funktor

$$(R\text{-Mod}) \longrightarrow (\mathscr{O}_X\text{-Mod}), \quad M \longmapsto \widetilde{M}$$

mit direkten Summen vertauscht, indem sie Halme $\mathscr{F}_a$, $a \in X$ heranziehen.

Aufgabe 2. Sei k ein Grundkörper. Konstruieren Sie auf der projektiven Geraden $X = \mathbb{P}^1$ einen $\mathscr{O}_X$-Modul $\mathscr{F}$, der nicht quasikohärent ist.

Aufgabe 3. Sei X ein Schema. Zeigen Sie, dass die Teilmengen $U \subset X$, die zugleich offen und abgeschlossen sind, den idempotenten Elementen $e \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ entsprechen.

Aufgabe 4. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_Y$ eine quasikohärente Idealgarbe, und $Z \subset Y$ das entsprechende abgeschlossenen Unterschema. Beweisen Sie, dass $f : X \to Y$ genau dann über $Z \subset Y$ faktorisiert, wenn für jeden Punkt $a \in X$ mit Bild $b = f(a)$ die Verkettung

$$\mathscr{I}_b \subset \mathscr{O}_{Y,b} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,a}$$

verschwindet.

Abgabe: Bis Freitag, den 3. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 3

Aufgabe 1. Sie X ein Schema, $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe, $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ ein globaler Schnitt, und

$$X_s = \{a \in X \mid s(a) \neq 0 \text{ in } \mathscr{L}_a/\mathfrak{m}_a\mathscr{L}_a\}.$$

Verifizieren Sie, dass dies eine offenen Teilmenge ist, und dass die Inklusionsabbildung $i : X_s \to X$ ein affiner Morphismus von Schemata ist.

Aufgabe 2. Sei $f : X \to Y$ ein affiner Morphismus von Schemata. Zeigen Sie, dass für jede quasikohärente Garbe $\mathscr{F}$ auf X die resultierende direkte Bildgarbe $f_*(\mathscr{F})$ quasikohärent auf Y ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe auf einem geringtem Raum X, und $U_i \subset X$, $i \in I$ eine offenen Überdeckung, für die es Isomorphismen $\varphi_i : \mathscr{O}_{U_i} \to \mathscr{L}|U_i$ gibt. Wir bezeichnen mit $e_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{L})$ die Bilder des lokalen Schnitts $1 \in \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ unter φ_i.

(i) Verifizieren Sie, dass $e_i|U = \alpha_{ij} \cdot e_j|U$ mit eindeutig bestimmten lokale Schnitte $\alpha_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathscr{O}_X^\times)$ auf den Überlappungen $U = U_{ij}$.

(ii) Rechnen Sie nach, dass diese auf den Überlappungen $V = U_{ijk}$ der Kozykelbedingung genügen:

$$\alpha_{jk}|V \cdot \alpha_{ij}|V = \alpha_{ik}|V.$$

Aufgabe 4. Sei X ein Schema, $\mathscr{E}$ eine lokal freie Garbe vom Rang $r \geq 0$, und

$$V = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}^\bullet(\mathscr{E}^\vee)) \xrightarrow{f} X$$

das entsprechende Vektorbündel. Beweisen Sie, dass die Schnitte $s : X \to V$ bezüglich des Strukturmorphismus $f : V \to X$ genau den globalen Schnitten $\sigma \in \Gamma(X, \mathscr{E})$ ensprechen.

Abgabe: Bis Freitag, den 10. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper von Charakteristik $p \geq 0$, und X das Spektrum einer endlichen k-Algebra A. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das Schema X is projektiv.

(ii) Wenn der Ring A reduziert und $p = 0$ ist, so gibt es sogar eine abgeschlossene Einbettung $X \subset \mathbb{P}^1$.

(iii) Letzter Aussage ist falsch in Charakteristik $p > 0$.

Aufgabe 2. Sei S ein graduierter Ring, M ein graduierter Modul, und $f, g \in S_+$ zwei homogene Elemente. Schreibe $m = \deg(f)$ und $n = \deg(g)$. Verifizieren Sie die Gleichheit von Lokalisierungen

$$(M_{(f)})_{g^m/f^n} = M_{(fg)}.$$

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper und $S = k[x, y, z]$ der Polynomring in drei Unbestimmten, versehen mit der Nichtstandard-Graduierung $\deg(x) = \deg(y) = 1$ und $\deg(z) = n$ für eine ganze Zahl $n \geq 1$. Das resultierende homogene Spektrum

$$\mathbb{P}(1, 1, n) = \operatorname{Proj}(S)$$

ist ein *gewichtet-projektiver* 2-*Raum*. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(1, 1, n)$ von den drei affinen offenen Teilmengen

$$U = D_+(x), \quad V = D_+(y) \quad \text{und} \quad W = D_+(z)$$

überdeckt wird, dass zwei davon isomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{A}^2$ sind, und dass die dritte das Spektrum einer k-Algebra ist, die von $n+1$ Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 4. Für welche graduierten Ringe $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ ist das homogene Spektrum $X = \operatorname{Proj}(S)$ leer?

Abgabe: Bis Freitag, den 17. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei A ein Ring mit trivialer Picard-Gruppe $\mathrm{Pic}(A) = 0$. Beschreiben Sie die Menge der A-wertigen Punkte $\mathbb{P}^n(A)$ durch homogene Koordinaten.

Aufgabe 2. Sei F ein Körper und $R \subset F$ ein Unterring mit folgender Eigenschaft: Für jedes $f \in F^\times$ gilt $f \in R$ oder $1/f \in R$. Folgern Sie, dass dann $F = \mathrm{Frac}(R)$ gilt, und dass die Menge aller Ideale $\mathfrak{a} \subset R$ durch die Inklusionsrelation total geordnet ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper, X ein integres Schema mit Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) = k$, und $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe. Angenommen, sowohl $\mathscr{L}$ als auch die duale Garbe $\mathscr{L}^{\otimes -1}$ besitzen nicht-triviale globale Schnitte. Zeigen Sie, dass dann $\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_X$ gilt.

Aufgabe 4. Sei X ein Schema, dessen zugrundeliegender Raum noethersch ist, und $\mathscr{L}, \mathscr{N}$ zwei invertierbare Garben. Angenommen, $\mathscr{L}$ is ampel. Beweisen Sie mit dem Fortsetzungssatz für lokale Schnitte, dass es eine natürliche Zahl $n \geq 0$ gibt so, dass $\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ ampel ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 24. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei X ein Schema. Angenommen, die Diagonale

$$\Delta : X \longrightarrow X \times X$$

ist ein affiner oder quasikompakter Morphismus. Was bedeuten diese beiden Eigenschaften für die Durchschnitte $U \cap V$ zweier affinen offenen Mengen $U, V \subset X$?

Aufgabe 2. Sei X ein Schema, dessen zugrundeliegender Raum noethersch ist, und $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe. Zeigen Sie, dass die kanonischen Abbildung

$$r : X \smallsetminus \mathrm{SBs}(\mathscr{L}) \longrightarrow P(X, \mathscr{L}) = \operatorname{Proj} R(X, \mathscr{L})$$

dichtes Bild hat.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper, X ein separiertes quasikompaktes Schema, $k \subset A$ eine Ringerweiterung,

$$X' = X \otimes_k A = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(A)$$

der resultierende Basiswechsel, und $p : X' \to X$ die Projektion. Zeigen Sie, dass für jede quasikohärente Garbe $\mathscr{F}$ auf X die kanonische Abbildung

$$H^0(X, \mathscr{F}) \otimes_k A \longrightarrow H^0(X', p^*(\mathscr{F}))$$

bijektiv ist, indem Sie das Garbenaxiom heranziehen und Flachheit ausnutzen.

Aufgabe 4. Sei k ein Grundkörper von Charakteristik $p > 0$, und $k \subset k'$ eine rein inseparable algebraische Körpererweiterung. Folgern Sie, dass für jedes Schema X die Projektion

$$f : X' = X \otimes_k k' = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k') \longrightarrow X$$

ein Homöomorphismus ist, indem Sie die Fasern $f^{-1}(b)$ betrachten.

Abgabe: Bis Freitag, den 8. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus von Schemata. Angenommen, jeder generische Punkt $\eta \in Y$ liegt im Bild. Deduzieren Sie, dass f surjektiv sein muss.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Ring, X ein eigentliches R-Schema, $\mathscr{L}$ eine ample Garbe, und $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ ein globaler Schnitt. Verifizieren Sie, dass die resultierende offenen Menge $X_s = \{a \in X \mid s(a) \neq 0\}$ affin ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, in der alle Faserprodukte existieren, sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Morphismen. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\Delta"] & Y \times_Z Y & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[dr, "f"'] & X \times_Z Y \arrow[u, "f \times \mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & X \arrow[d, "g \circ f"] \\
& Z \times_Z Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] & Z
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist und die beiden Quadrate cartesisch sind.

Aufgabe 4. Sei R ein noetherscher Ring und X ein projektives R-Schema. Zeigen Sie, dass es dann eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra vom endlichen Typ $R_0 \subset R$ und ein projektives R_0-Scheme X_0 gibt so, dass $X \simeq X_0 \otimes_{R_0} R$.

Abgabe: Bis Freitag, den 8. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei X ein geringter Raum, und $\mathscr{F}_\lambda$, $\lambda \in L$ eine Familie von $\mathscr{O}_X$-Moduln. Angenommen, die $\mathscr{F}_\lambda$ sind injektiv oder welk. Verifizieren Sie, dass dann auch die Produktgarbe

$$\mathscr{F} = \prod_\lambda \mathscr{F}_\lambda$$

injektiv bzw. welk ist.

Aufgabe 2. Sei X ein geringter Raum, $\mathscr{F}$ eine $\mathscr{O}_X$-Modul, und $\beta \in H^r(X, \mathscr{F})$ eine Kohomologieklasse im Grad $r \geq 1$, und $a \in X$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass es eine offenen Umgebung U gibt mit $\beta|U = 0$ in $H^r(U, \mathscr{F}|U)$.

Aufgabe 3. Sei X ein geringter Raum und $\mathscr{F}$ ein $\mathscr{O}_X$-Modul. Sei $U_\lambda \subset X$, $\lambda \in L$ eine Basis der Topologie. Angenommen, die Einschränkungen $\mathscr{F}|U_\lambda$ sind welk. Zeigen Sie, dass dann $\mathscr{F}$ welk ist, indem Sie das Lemma von Zorn auf Erweiterungen von lokalen Schnitten über offenen Umgebungen anwenden.

Aufgabe 4. Sei X ein geringter Raum und

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathscr{O}_X$-Moduln. Angenommen, der linke Term $\mathscr{F}'$ is welk. Zeigen Sie, dass sich jeder globale Schnitt von $\mathscr{F}''$ zu einem globalen Schnitt von $\mathscr{F}$ liften lässt, indem sie das Lemma von Zorn anwenden. Geben Sie anschließend noch einen kohomologischen Beweis.

Abgabe: Bis Freitag, den 15. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei C eine zusammenhängende reduzierte Kurve. Verifizieren Sie, dass für jede kohärente Garbe $\mathscr{F}$ die Zahlen $h^0(\mathscr{F})$ und $h^1(\mathscr{F})$ ein Vielfaches von $h^0(\mathscr{O}_C)$ ist.

Aufgabe 2. Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ zwei ebene Kurven ohnen gemeinsame irreduzible Komponenten. Drücken Sie das Geschlecht $g = h^1(\mathscr{O}_C)$ der Vereinigung $C = C_1 \cup C_2$ durch die Geschlechter $g_i = h^1(\mathscr{O}_{C_i})$ aus.

Aufgabe 3. Sei k ein imperfekter Grundkörper von Charakteristik $p = 2$. Zeigen Sie, dass es einen Quadrik $C \subset \mathbb{P}^2$ gibt, welche integer, geometrisch irreduzibel aber geometrisch nicht-reduziert ist.

Aufgabe 4. Geben Sie für jede der vier charakterisierenden Eigenschaften von $\mathbb{P}^1$ eine ebene Kurve $C \subset \mathbb{P}^2$ an, für welche diese Eigenschaft nicht gilt, die jedoch die übrigen drei Eigenschaften besitzt.

Abgabe: Bis Freitag, den 22. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut WS 17/18
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei C eine integre Kurve vom Geschlecht $h^1(\mathscr{O}_C) = 1$, dessen Normalisierung $\tilde{C}$ geometrisch integer ist. Verifizieren Sie mit der langen exakten Kohomologiesequenz zu

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \nu_*(\mathscr{O}_{\tilde{C}}) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0,$$

dass es höchstens einen singulären Punkt $a \in C$ geben kann.

Aufgabe 2. Sei C eine integre Kurve mit $h^1(\mathscr{O}_C) = 0$. Angenommen, es gibt eine invertierbare Garbe $\mathscr{L}$ vom Grad $\deg(\mathscr{L}) = 1$. Folgern Sie, dass dann $C \simeq \mathbb{P}^1$ gilt.

Aufgabe 3. Sei C eine Kurve, $\mathscr{L} = \mathscr{O}_C(1)$ eine ample invertierbare Garbe, und $\mathscr{F}$ eine kohärente Garbe. Zeigen Sie, dass für $n > 0$ hinreichend groß die kanonische Abbildung

$$H^0(C, \mathscr{F}(n)) \otimes_k \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{F}(n), \quad s \otimes 1 \longmapsto s(1)$$

surjektiv ist. Hierbei ist k der Grundkörper und $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{L}^{\otimes n}$. Benutzen Sie dabei den Fortsetzungssatz für lokale Schnitte.

Aufgabe 4. Sei $C = C_1 \cup C_2$ eine reduzierte zusammenhängende Kurve mit zwei irreduziblen Komponenten. Konstruieren Sie eine integre Kurve Z und eine eigentliche Morphismus $f : C \to Z$ so, dass $f(C_1) = \{b\}$ ein abgeschlossener Punkt ist und $f(C_2) = Z$ gilt. Verwenden Sie dazu geeignete semiample Garbe $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(C)$ mit $\mathscr{L}|C_1 = \mathscr{O}_{C_1}$. Illustrieren sie die Aussage mit einer Skizze.

Abgabe: Bis Freitag, den 12. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei C eine Kurve und $f : C \to \mathbb{P}^1$ ein endlicher Morphismus. Verifizieren Sie, dass die kohärente Garbe

$$\mathscr{A} = f_*(\mathscr{O}_C)$$

lokal frei ist genau dann, wenn das Schema C keine eingebetteten Komponenten hat. Verwenden Sie dabei die Struktursätze für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen.

Aufgabe 2. Seien $m \geq 1$ und $n \geq 0$ zwei ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass es eine Kurve C mit Reduktion $C_{\text{red}} = \mathbb{P}^1$ und

$$h^0(\mathscr{O}_C) = m \quad \text{und} \quad h^1(\mathscr{O}_C) = n$$

gibt. Konstruieren Sie dabei die Strukturgarbe als $\mathscr{O}_C = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{I}$, wobei die Idealgarbe $\mathscr{I}$ die Eigenschaft $\mathscr{I}^2 = 0$ besitzt.

Aufgabe 3. Sei C eine reduzierte Kurve und $a_1, \ldots, a_n \in C$ abgeschlossenen Punkte. Zeigen Sie, dass es einen endlichen Morphismus $f : C \to \mathbb{P}^1$ gibt mit

$$f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n).$$

Verwenden Sie dabei einen zwei-dimensionalen Vektorraum $E \subset H^0(C, \mathscr{L})$ zu einer geeigneten amplen Garben $\mathscr{L}$.

Aufgabe 4. Sei X ein geringter Raum, $\mathscr{F}$ ein $\mathscr{O}_X$-Modul, und $\mathscr{E}$ ein lokal freier $\mathscr{O}_X$-Module vom endlichen Rang. Beweisen Sie mit injektiven Auflösungen, dass es eine kanonische Identifizierung

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{E}, \mathscr{F}) = H^i(X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F})$$

zwischen Ext-Gruppen und Kohomologie-Gruppen gibt. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel mit $X = \mathbb{P}^1$ und $i = 0$, dass dies für beliebige $\mathscr{E}$ im Allgemeinen falsch wird.

Abgabe: Bis Freitag, den 19. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei C eine integre Gorenstein-Kurve, und $\mathscr{L}$ eine ample invertierbare Garbe. Zeigen Sie, dass dann $h^1(\mathscr{L}^{\otimes n}) = 0$ für alle $n \gg 0$ gilt.

Aufgabe 2. Wir betrachten die rationale Kurve

$$C = \operatorname{Spec} k[T^2, T^5] \cup \operatorname{Spec} k[T^{-1}]$$

über dem Grundkörper k. Verifizieren Sie, dass C Gorensteinsch ist und berechnen Sie den Grad $\deg(\omega_C)$ der dualisierenden Garbe. Betten Sie dazu die Kurve in den $\mathbb{P}^2$ ein.

Aufgabe 3. Seien $F, G \in k[T_0, T_1]$ zwei homogene Polymome vom Grad $m, n > 0$ ohne gemeinsamen Nullstelle auf $\mathbb{P}^1$. Verifizieren Sie, dass der resultierende Homomorphism

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{F,G} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$$

injektiv und der Kokern $\mathscr{L}$ invertierbar ist, und berechnen Sie $\deg(\mathscr{L})$ und $h^0(\mathscr{L})$.

Aufgabe 4. Sei C eine integre Kurve vom Geschlecht $g \geq 1$, und $a \in C$ ein rationaler Punkt, dessen lokaler Ring $\mathscr{O}_{C,a}$ regulär ist. Beweisen Sie, dass dann

$$h^0(\mathscr{L}) = 1 \quad \text{und} \quad h^1(\mathscr{L}) = g - 1$$

für die resultierende invertierbare Garbe $\mathscr{L} = \mathscr{O}_C(a)$ gilt. Argumentiered Sie dabei durch Widerspruch, indem Sie aus einem zwei-dimensionalen Untervektorraum von $H^0(C, \mathscr{L})$ einen Isomorphismus $f : C \to \mathbb{P}^1$ konstruieren.

Abgabe: Bis Freitag, den 26. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.