

## Übungen zur Kategorientheorie

### Blatt 4

**Aufgabe 1.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, in welcher endliche Produkte existieren. Wir bezeichnen mit  $\text{Grp}_{\mathcal{C}}$  die Kategorie der Gruppenobjekte von  $\mathcal{C}$ . Zeigen Sie, dass in  $\text{Grp}_{\mathcal{C}}$  endliche Produkte existieren und dass der Vergissfunktorkommutiert.

**Aufgabe 2.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit endlichen Produkten und  $X$  ein Objekt. Zeigen Sie:  $X$  ist Gruppenobjekt in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn der Funktorkommutiert.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, dass echte Unterkategorien abelscher Kategorien im allgemeinen nicht abelsch sind, indem Sie ein Beispiel angeben. Geben Sie weiterhin ein Beispiel für eine echte Untergruppe einer abelschen Kategorie an, welche hingegen abelsch ist.

**Aufgabe 4.** Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie und betrachten Sie folgendes Diagramm in  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) Das Diagramm ist gleichzeitig Pullback und Pushout.
- (ii)  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ g \end{pmatrix}} B \oplus C \xrightarrow{(h, k)} D \rightarrow 0$  ist exakt.

**Abgabe:** Bis Dienstag, den 13. Dezember um 9:00 Uhr im Zettelkasten.