Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. Saša Novaković

WS 16/17

Übungen zur Kategorientheorie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $T \in \mathcal{C}$ ein terminales Objekt. Nehmen Sie an, dass die Faserprodukte $X \times_T Y$ und $X \times_X Y$ existieren. Zeigen Sie:

(i) $X \times_T Y = X \times Y$.

(ii) $X \times_X Y \simeq Y$.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ zwei Morphismen. Eine wohldefinierte Addition $f+g$ wird durch die Komposition

$$X \xrightarrow{\Delta} X \oplus X \xrightarrow{A} Y \oplus Y \xrightarrow{\nabla} Y$$

definiert, wobei $A = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das additive Inverse von f.

Aufgabe 3. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ additive Kategorien. Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ heißt *additiv*, falls für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Zeigen Sie:

(i) Ist für $X, Y \in \mathcal{C}$ die Projektion $X \times Y \to X$ ein Isomorphismus, so gilt $Y \simeq 0$.

(ii) Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ist additiv genau dann, wenn $F(X \times Y) \simeq F(X) \times F(Y)$.

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring und Mat_R folgende Kategorie: Die Objekte sind Elemente aus $\mathbb{N}_0$ und die Menge der Morphismen zwischen n und m ist gegeben durch $\mathrm{Mat}_{m,n}(R)$. Zeigen Sie, dass Mat_R eine additive Kategorie ist.

Abgabe: Bis Dienstag, den 29. November um 9:00 Uhr im Zettelkasten.