Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. Saša Novaković WS 16/17

Übungen zur Kategorientheorie

Blatt 2

Aufgabe 1. Zeigen Sie folgende Aussagen über den Dualisierungsfunktor:

(i) $(-)^*\colon (k\text{-Vec}) \to (k\text{-Vec})^{\mathrm{op}}$ ist nicht essenziell surjektiv.

(ii) $(-)^*\colon (k\text{-FVec}) \to (k\text{-FVec})^{\mathrm{op}}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Aufgabe 2. Seien G und H Gruppen, betrachtet als Kategorien mit jeweils einem Objekt, und $S, T\colon G \to H$ zwei Funktoren. Zeigen Sie, dass S und T Gruppenhomomorphismen sind und das eine natürliche Transformation $\phi\colon S \to T$ genau dann existiert, wenn S und T konjugiert sind (d.h. es existiert ein $h \in H$ mit $T(g) = hS(g)h^{-1}$ für alle $g \in G$).

Aufgabe 3. Sei $V\colon (\mathrm{Grp}) \to (\mathrm{Set})$ der Vergissfunktor. Zeigen Sie, dass V darstellbar ist und bestimmen Sie das darstellende Objekt, sowie die zugehörigen universellen Elemente. Wie kann $\mathrm{Nat}(V, V)$ gemäß Yoneda–Lemma aufgefasst werden?

Aufgabe 4. Sei k ein Körper, $\alpha \in \bar{k}$ und f das Minimalpolynom von α. Wir bezeichnen mit (Field/k) die Kategorie der Körpererweiterungen von k und betrachten den Funktor

$$\mathcal{N}_\alpha\colon (\mathrm{Field}/k) \to (\mathrm{Set}), L \mapsto \{\beta \in L | f(\beta) = 0\}.$$

Ist der Funktor $\mathcal{N}_\alpha$ darstellbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls das darstellende Objekt und das zugehörige universelle Element.

Abgabe: Bis Dienstag, den 15. November um 9:00 Uhr im Zettelkasten.