Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer
Dr. Saša Novaković

WS 16/17

Übungen zur Kategorientheorie

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{U}$ ein Universum. Zeigen Sie mit Hilfe der Axiome, dass $\mathbb{N}$ in $\mathcal{U}$ enthalten sein muss. Zeigen Sie ferner, dass der Schnitt zweier Universen ebenfalls ein Universum ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das Bild eines Funktors im Allgemeinen keine Unterkategorie ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Bild des Vergissfunktors $V\colon (\mathrm{Grp}) \to (\mathrm{Set})$ eine Unterkategorie von (Set) ist. Des Weitern, zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Das Bild von V ist volle Unterkategorie.

(ii) Der Funktor V ist essentiell surjektiv.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Zeigen Sie:

(i) Für alle $X \in \mathcal{C}$ ist $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ ein Isomorphismus mit $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$.

(ii) Für jeden Isomorphismus $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ gilt: $f^{-1}\colon Y \to X$ ist ebenfalls ein Isomorphismus mit $(f^{-1})^{-1} = f$.

(iii) Ist $f\colon X \to Y$ ein Isomorphismus und $g\colon Y \to Z$ ein weiterer, so ist $g \circ f\colon X \to Z$ ebenfalls ein Isomorphismus mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Insbesondere ist die Isomorphierelation eine Äquivalenzrelation.

Abgabe: Bis Dienstag, den 1. November um 9:00 Uhr im Zettelkasten.