

Übungen zur Algebra

Blatt 13

Aufgabe 1. Sei K ein Körper von Charakteristik $p > 0$, für den der Frobenius-Morphism

$$F : K \longrightarrow K, \quad x \longmapsto x^p$$

bijektiv ist. Zeigen Sie, dass jede algebraische Körpererweiterung $K \subset L$ separabel ist.

Aufgabe 2. Sei $K \subset L$ der Zerfällungskörper eines irreduziblen separablen Polynoms $f \in K[T]$ vom Grad drei. Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe

$$G = \text{Gal}(L/K)$$

isomorph zur zyklischen Gruppe C_3 oder zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass die Galois-Gruppe $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ unendlich ist, indem Sie Elemente $\sigma \in G$ von beliebig grosser Ordnung konstruieren.

Aufgabe 4. Sei $p > 0$ eine Primzahl, und $\mathbb{Q} \subset L$ der Zerfällungskörper des Polynoms $f(T) = T^p - 1$. Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe

$$\text{Gal}(f) = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$$

isomorph zur Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 14. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Fristen: Durch eine kurzfristige Entscheidung der Universität wurden die Anmeldefristen für Prüfungen informell geändert: Die Anmeldefrist für die erste Klausur am 25.7. endet am 18.7. Die Anmeldefrist für die zweite Klausur am 4.10. endet am 27.9. Dies gilt für **alle Studierenden**. Verspätete Anmeldungen können nicht entgegengenommen werden.

Erlaubte Hilfsmittel zu den schriftlichen Prüfungen: Ein Din A4 Blatt handschriftliche Notizen.