

## Übungen zur Algebra

### Blatt 12

**Aufgabe 1.** Sei  $K = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass jede algebraische Körpererweiterung  $K \subset L$  normal ist.

**Aufgabe 2.** Wir betrachten die reelle Zahl  $a = \sqrt[4]{2}$  und die resultierende Körpererweiterung  $L = \mathbb{Q}(a) \subset \mathbb{R}$ .

- (i) Berechnen Sie das Minimalpolynom  $f \in \mathbb{Q}[T]$  von  $a \in \mathbb{R}$ , und folgern Sie, dass  $[L : \mathbb{Q}] = 4$  gilt.
- (ii) Zeigen Sie, dass es einen Zwischenkörper  $\mathbb{Q} \subset E \subset L$  gibt so, dass  $\mathbb{Q} \subset E$  und  $E \subset L$  normale Erweiterungen sind.
- (iii) Beweisen Sie, dass  $\mathbb{Q} \subset L$  nicht normal ist.

**Aufgabe 3.** Sei  $K \subset \Omega$  ein algebraischer Abschluß und  $a_i \in \Omega$ ,  $i \in I$  eine Familie von Elementen vom Grad zwei. Zeigen Sie, dass

$$L = K(a_i)_{i \in I} \subset \Omega$$

eine normale Erweiterung von  $K$  ist.

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass jede endliche Erweiterung  $K \subset E$  als Zwischenkörper einer endlichen normalen Erweiterung  $K \subset L$  auftritt.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, den 7. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Bitte melden Sie sich über das Portal für die erste Klausur am 25.7. an. Die **Anmeldefrist** endet am 11.7.