Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 16

Übungen zur Algebra

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix mit irreduziblem Minimalpolynom $\mu_A(T) \in K[T]$, und $E \subset \mathrm{Mat}_n(K)$ der Teilmenge aller Matrizen, die als Polynom in A geschrieben werden können. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$E \subset \mathrm{Mat}_n(K)$$

durch die Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation zu einem Körper gemacht wird.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $L = K(a)$ eine quadratische Körpererweiterung, und

$$f(T) = T^2 + \lambda T + \mu \in K[T]$$

das Minimalpolynom von $a \in L$. Berechnen Sie für alle $b = \rho a + \tau \in L$ das Minimalpolynom $g(T) \in K[T]$, indem Sie die K-lineare Abbildung

$$L \longrightarrow L, \quad x \longmapsto bx$$

betrachten und den Satz von Cayley–Hamilton anwenden.

Aufgabe 3. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung, und $K \subset E_1, E_2 \subset L$ zwei Zwischenkörper mit endlichen Graden $n_i = [E_i : K]$. Angenommen, $\mathrm{ggT}(n_1, n_2) = 1$. Zeigen Sie, dass dann

$$E_1 \cap E_2 = K$$

gilt.

Aufgabe 4. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der von den mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen $z \in \mathbb{C}$ erzeugte Körper von komplexen Zahlen, und $E \subset \mathbb{R}$ der von den Real- und Imaginärteilen dieser $z = x + iy$ erzeugte Körper von reellen Zahlen. Beweisen Sie, dass dann

$$L = E(i)$$

gilt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 30. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.