Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 16

# Übungen zur Algebra

## Blatt 9

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus für die beiden rationalen Polynome

$$f_0 = T^7 - T^6 - 3T^5 + 3T^4 + 2T^3 - T^2 - 2,$$
$$f_1 = T^5 - T^4 - 2T^3 + T^2 + 2$$

den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(f_0, f_1)$.

**Aufgabe 2.** Sei $R$ ein faktorieller Ring. Zeigen Sie, dass es zu je zwei Ringelementen $a, b \in R \smallsetminus \{0\}$ einen größten gemeinsamen Teiler $g = \mathrm{ggT}(a, b)$ und ein kleinstes gemeinsames Vielfaches $k = \mathrm{kgV}(a, b)$ gibt.

**Aufgabe 3.** Sei $R$ ein faktorieller Ring, und $F = \mathrm{Frac}(R)$ sein Körper der Brüche. Sei $p \in R$ ein Primelement, $S = R \smallsetminus (p)$ das Komplement des resultierenden Primideals, und

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in R \text{ und } b \in S \right\} \subset F$$

(i) Verifizieren Sie, dass die Teilmenge $S \subset R$ ein Untermonoid bezüglich der Multiplikation ist.

(ii) Rechnen Sie nach, dass die Teilmenge $S^{-1}R \subset F$ ein Unterring ist.

(iii) Beweisen Sie, dass $S^{-1}R$ ein Hauptidealring ist.

**Aufgabe 4.** Sei $R$ ein Ring, in dem jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ endlich erzeugt ist, also von der Form

$$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r) = \sum_{i=1}^{r} Ra_i$$

ist. (Solche Ringe werden *noethersch* genannt.) Zeigen Sie, dass jede aufsteigende Kette

$$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots$$

von Idealen stationär ist.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, den 16. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.