Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 16

Übungen zur Algebra

Blatt 5

Aufgabe 1. Seien N und H zwei Gruppen, sowie $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Verifiziern Sie, dass die Verknüpfung

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a\varphi_b(a'), bb')$$

des semidirekten Produkts $N \rtimes_\varphi H$ tatsächlich eine Gruppenstruktur ist.

Aufgabe 2. Sei $D_n = C_n \rtimes \{\pm 1\}$ die diedrische Gruppe von Ordnung $2n$.

(i) Bestimmen Sie für jedes $x \in D_n$ die Ordnung $\mathrm{ord}(x) \geq 1$.

(ii) Konstruieren Sie injektive Homomorphismen

$$f : D_n \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad g : D_n \longrightarrow S_n.$$

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare Matrix über einem Körper K, und $\langle A \rangle \subset \mathrm{GL}_n(K)$ die davon erzeugte Untergruppe. Berechnen Sie das Zentrum $Z \subset G$ des semidirekten Produkts

$$G = K^n \rtimes \langle A \rangle.$$

Aufgabe 4. (i) Schreiben Sie die alternierende Gruppe A_4 als semidirektes Produkt $\mathbb{F}_2^2 \rtimes \langle A \rangle$ für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

(ii) Folgern Sie, dass es keinen nichttrivialen Homomorphismus $f : A_4 \to C_2$ gibt.

(iii) Beweisen Sie dann, dass A_4 keine Untergruppe der Ordnung sechs enthält.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 19. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Am **Feiertag Pfingsmontag**, den 16. Mai finden keine Übungsgruppen statt. Deshalb wird am Dienstag, den 17. Mai die Gruppe 4 um 14:30 Uhr im Hörsaal 5A abgehalten und steht allen Übungsgruppenteilnehmern offen.