Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 16

# Übungen zur Algebra

## Blatt 1

**Aufgabe 1.** Sei $S$ ein Monoid. Verifizieren Sie, dass das neutrale Element $e \in S$ eindeutig ist, und dass zu jedem invertierbaren Element $a \in S$ das inverse Element $a^{-1} \in S$ ebenfalls eindeutig ist.

**Aufgabe 2.** Sei $K$ ein Körper. Wir betrachten die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(K)$. Welche der folgenden Teilmengen $H \subset G$ sind Untergruppen? Welche davon sind Normalteiler?

(i) Die Teilmenge der Skalarmatrizen.

(ii) Die Teilmenge der Diagonalmatrizen.

(iii) Die Teilmenge der symmetrischen Matrizen.

(iv) Die Teilmenge der oberen Dreiecksmatrizen.

(v) Die Teilmenge der halbeinfachen Matrizen.

Tipp: Betrachten Sie gegebenenfalls den Spezialfall $K = \mathbb{F}_2$, also $K^\times = \{1\}$ gesondert.

**Aufgabe 3.** Sei $Q \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ die Teilmenge, welche aus den beiden Skalarmatrizen sowie den sechs spurlosen Matrizen besteht. Geben Sie diese acht Elemente explizit an, und zeigen Sie, dass $Q \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ eine normale Untergruppe ist.

**Aufgabe 4.** Sei $G$ eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ ihre Automorphismengruppe, also die Gruppe aller bijektiven Homomorphismen $f : G \to G$ bezüglich der Verkettung. Zu $g \in G$ betrachten wir die Konjugationsabbildung

$$c_g : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto gxg^{-1}.$$

Rechnen Sie die folgenden Aussagen nach:

(i) Die Abbildungen $c_g : G \to G$ sind Automorphismen.

(ii) Die Abbildung $c : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto c_g$ ist ein Homomorphismus.

(iii) Der Kern $\mathrm{Ker}(c) \subset G$ besteht aus dem Zentrum $Z \subset G$.

(iv) Das Bild $\mathrm{Im}(c) \subset \mathrm{Aut}(G)$ ist ein Normalteiler.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, den 21. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

**Prüfungstermine:**
Erste Klausur am Montag, den 25. Juli um 8:30–10:30 Uhr.
Zweite Klausur am Freitag, den 4. Oktober von 8:30–10:30 Uhr.