Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei B eine kompakte orientierbare 2-Mannigfaltigkeit vom Geschlecht $g \geq 1$. Verifizieren Sie mit dem Hauptsatz der Überlagerungstheorie, dass es unendlich viele Isomorphieklassen von Überlagerungen $p : X \to B$ mit zusammenhängendem Totalraum X und $\deg(X/B) = \infty$ gibt.

Aufgabe 2. Sei $B = P^2 \# P^2$ die Kleinsche Flasche, und $p : X \to B$ die Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum, für welche die Untergruppe $p_* \pi_1(X, a) \subset \pi_1(B, b)$ von

$$z_1^2, z_1 z_2 \in \pi_1(B, b) = \langle z_1, z_2 \mid z_1^2 z_2^2 \rangle$$

erzeugt wird. Rechnen Sie nach, dass die Fundamentalgruppe des Totalraums abelsch ist, und folgern Sie, dass X homöomorph zum Torus T^2 ist.

Aufgabe 3. Sei $p : X \to B$ eine endlichen Überlagerung des Torus $B = T^2$ mit nichtleerem, zusammenhängendem Totalraum. Zeigen Sie ähnlich wie bei der vorangegangenen Aufgabe, dass der Totalraum homöomorph zum Torus sein muss.

Aufgabe 4. Sei B eine kompakte zusammenhängende nichtleere 2-Mannigfaltigkeit. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen von Überlagerungen $X \to B$ vom Grad $\deg(X/B) = 2$ mit zusammenhängenden nichtleerem Totalraum.

Tipp: Benutzen Sie, dass Untergruppen vom Index zwei stets normal sind, und zählen sie die surjektiven Homomorphismen $\pi_1(B, b) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 4. Februar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.