Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Surjektion, mit X quasikompakt und Y Hausdorffsch. Folgern Sie, dass Y die Quotiententopologie trägt.

Aufgabe 2. Seien X, Y zwei kompakte, zusammenhängende, nichtleere 2-Mannigfaltigkeiten. Verifizieren Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Räume X und Y sind homöomorph.

(ii) Die Räume X und Y haben den gleichen Homotopietyp.

(iii) Die Gruppen $\pi_1(X, a)$ und $\pi_1(Y, b)$ sind isomorph.

(iv) Die abelschen Gruppen $H_1(X)$ und $H_1(Y)$ sind isomorph.

(v) Die $\mathbb{F}_p$-Vektorräume $H_1(X, \mathbb{F}_p)$ und $H_1(Y, \mathbb{F}_p)$ haben die gleiche Dimension, für jeweils $p = 2$ und $p = 3$.

Aufgabe 3. Unter der *Narrenkappe* versteht man den Raum X, der aus einem Dreieck P ensteht, indem alle drei Seiten miteinander identifiziert werden, und zwar gemäß des Wortes z^3. Berechnen Sie $\pi_1(X, a)$.

Aufgabe 4. Sei Z der Raum, der aus $Y = P^2$ durch Ankleben einer weiteren Kopie $X = P^2$ bezüglich einer Anklebeabbildung $\varphi : \{a\} \to \{b\}$ entsteht. Sei $c \in C$ der Punkt, welcher $a \in X$, $b \in Y$ entspricht.

(i) Zeigen Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen, dass $\pi_1(Z, c)$ isomorph zur Summe $C_2 \star C_2$ ist, wobei C_2 die zyklische Gruppe von Ordnung zwei ist.

(ii) Folgern Sie, dass die erste Betti-Zahl $b_1(Z)$ verschwindet.

(iii) Verwenden Sie eine geeignete Darstellung $\pi_1(Z, c) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ um zu verifizieren, dass die Gruppe G unendlich ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 21. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.