Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 8

Aufgabe 1. Fassen Sie P^2 als Vereinigung von einem Möbius-Band und einer Kreisscheibe auf. Zeigen Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen, dass $\pi_1(P^2, a) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 3$. Sei $a \in X$ ein Fußpunkt, $U \subset X$ eine offene Umgebung, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, und $b \neq a$ ein weiterer Punkt aus U. Zeigen Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen, dass die kanonische Abbildung

$$\pi_1(X \smallsetminus \{b\}, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

bijektiv ist. Gilt diese Aussage auch für 2-Mannigfaltigkeiten?

Aufgabe 3. Sei $Z \subset \mathbb{R}^2$ eine unendliche diskrete abgeschlossene Teilmenge, und $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus Z$. Beweisen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, a)$ nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 4. Sei $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung mit $U, V, U \cap V$ wegzusammenhängen. Drücken sie mittels des Satzes von Seifert–van Kampen die erste Homologiegruppe $H_1(X) = \pi_1(X, a)^{\mathrm{ab}}$ durch die Homologiegruppen

$$H_1(U), \quad H_1(V) \quad \text{und} \quad H_1(U \cap V)$$

aus. Was ergibt sich daraus für die erste Betti-Zahl $b_1(X)$?

Abgabe: Bis Donnerstag, den 14. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.