Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ der Einheitskreis, $e \in S^1$ das Einselement, und n eine ganze Zahl. Verifizieren Sie, dass die von $z \mapsto z^n$ induzierte Abbildung auf $\pi_1(S^1, e) = \mathbb{Z}$ die Multiplikation mit n ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mittels Fundamentalgruppen, dass der Raum $\mathbb{R}^2$ nicht homöomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ ist.

Aufgabe 3. Sei X eine Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 2$, und $U \subset X$ eine offene Teilmenge, deren Komplement endlich ist.

(i) Beweisen Sie, dass die induzierte Abbildung

$$\pi_1(U, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

für jeden Fusspunkt $a \in U$ surjektiv ist.

(ii) Gilt diese Aussage auch für $n = 1$?

(iii) Verifizieren Sie für $X = P^2$ und $U = P^2 \smallsetminus \{b\}$, dass die obige Abbildung nicht injektiv ist.

Aufgabe 4. Sei $X = P^2 \# P^2$ die Kleinsche Flasche. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, a)$ von zwei Elementen erzeugt wird, und skizzieren Sie entsprechende Schleifen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 7. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!