Mathematisches Institut WS 15/16
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Fußpunkt, und $X_\lambda \subset X$, $\lambda \in L$ die Familie aller quasikompakten Teilmengen, welche den Fußpunkt enthalten. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Jedes Element von $\pi_1(X, a)$ ist im Bild eines $\pi_1(X_\lambda, a)$ enthalten.

(ii) Verschwindet ein Element von $\pi_1(X_\lambda, a)$ in $\pi_1(X, a)$, so verschwindet es bereits in einem $\pi_1(X_\mu, a)$ für ein $X_\lambda \subset X_\mu$.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen sie, dass X einfach zusammenhängend ist genau dann, wenn sich für $n = 0, 1$ jede stetige Abbildung $S^n \to X$ auf der Einheitssphäre zu einer stetigen Abbildung $D^{n+1} \to X$ auf dem Einheitsball fortsetzen lässt.

Aufgabe 3. Sei X ein Raum, $A \subset X$ ein Unterraum und $a \in A$ ein Fußpunkt. Angenommen, es gibt eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit der Eigenschaft $r|_A = \mathrm{id}_A$. Folgern Sie, dass die induzierte Abbildung $\pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv ist, und dass die Fundamentalgruppe von X als semidirektes Produkt

$$\pi_1(X, a) = H \rtimes \pi_1(A, a)$$

für einen Normalteiler $H \subset \pi_1(X, a)$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 4. Sei G eine topologische Gruppe. Seien $w, v : I \to G$ zwei Schleifen am neutralen Element $e \in G$. Beweisen Sie die foldenden beiden Aussagen:

(i) Die Zusammensetzungen $w \star v$ ist homotop zur Produktschleife $w(t)v(t)$.

(ii) Die beiden Produktschleifen $w(t)v(t)$ und $v(t)w(t)$ sind homotop.

Deduzieren Sie daraus, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ abelsch ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 17. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.