Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 4

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass die 0-Mannigfaltigkeiten genau die diskreten Räume mit abzählbar vielen Punkten sind.

Aufgabe 2. Sei X eine n-Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass jede Zusammenhangskomponente $U \subset X$ offen, abgeschlossen und wegzusammenhängend ist. Folgern Sie daraus, dass X eine abzählbare Summe von wegzusammenhängenden n-Mannigfaltigkeiten ist.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind Mannigfaltigkeit?

(i) Der Graph $A = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Die Nullstellenmenge $B = \{(x, y) \mid P(x, y) = 0\}$ für das Polynom

$$P(x, y) = x^2 - y^3.$$

(iii) Die Teilmenge $C = \mathbb{Q}^2$ der rationalen Vektoren.

(iv) Die topologische Sinuskurve D, also der Abschluss der Teilmenge

$$\{(x, \sin(1/x) \mid x > 0\}.$$

(v) Die Teilmenge $E = \{1/n \mid n \geq 1\} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Räume

$$X = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad Y = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}.$$

Benutzen Sie Alexandroff-Kompaktifizierungen, um zu beweisen, dass diese beiden 2-Mannigfaltigkeiten nicht homöomorph sind.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 3. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.