Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 15/16

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{R}$ die reelle Gerade, versehen mit der Standardtopologie, und $\mathbb{R}_l$ die reelle Gerade, ausgestattet mit der Sorgenfrey-Topologie. Welche der folgenden Abbildungen sind stetig?

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_l, \quad x \longmapsto x; \\ g &: \mathbb{R}_l \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x; \\ h &: \mathbb{R}_l \longrightarrow \mathbb{R}_l, \quad x \longmapsto -x; \\ k &: \mathbb{R}_l \longrightarrow \mathbb{R}_l, \quad x \longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ die Kollektion aller abgeschlossenen Intervalle der Form $H_\lambda =]-\infty, \lambda]$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Verifizieren Sie, dass $\mathscr{B}$ die Basis einer Topologie $\mathscr{T}$ auf der Menge $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass bezüglich der Topologie $\mathscr{T}$ beliebige Durchschnitte von offenen Menge wieder offen sind.

(iii) Folgern Sie daraus, dass $\mathbb{R}$ versehen mit der Topologie $\mathscr{T}$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie ist.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum, und $U_1, \ldots, U_n \subset X$ endliche viele dichte offene Teilmengen. Zeigen Sie, dass dann auch der Durchschnitt

$$U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$$

dicht in X ist.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, und $A, B \subset X$ zwei Teilmengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Abschluss und Inneres:

(i) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(ii) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(iii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(iv) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 5. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.