Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 13

Aufgabe 1. Sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen, und $f^* : V^* \to U^*$ die duale Abbildung. Verifizieren Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) f ist injektiv genau dann, wenn f^* surjektiv ist.

(ii) f ist surjektiv genau dann, wenn f^* injektiv ist.

Aufgabe 2. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes, und $f^* : V \to V$ seine adjungierte Abbildung. Zeigen Sie, dass f normal ist genau dann, wenn $f^* = P(f)$ für ein Polynom $P \in \mathbb{C}[T]$ gilt.

Aufgabe 3. Wie lautet die Jordan-Normalform für das Kronecker-Produkt $J_2(1) \otimes J_2(1) \in \mathrm{Mat}_3(K)$? Hierbei ist

$$J_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K).$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \neq 2, 3$ und $A \in \mathrm{Mat}_6(K)$ mit

$$\chi_A(T) = (T-1)(T+2)^2(T+1)^3 \quad \text{und} \quad \mu_A(T) = (T-1)(T+2)(T+1)^2.$$

Wie lautet die Jordan-Normalform für A? Was lässt sich in den Fällen $p = 2$ oder $p = 3$ sagen?

Abgabe: Bis Donnerstag, den 9.7. um 8:25 Uhr im Zettelkasten. Dieses Blatt wird nicht mehr von den Hilfskräften korrigiert, aber in den Übungsgruppen besprochen.