Mathematisches Institut SS 15
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 1. Wie lauten die Jordan-Normalformen der folgenden komplexen 3×3-Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei

$$J_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

die Jordan-Matrix zum Eigenwert $\lambda \in K^\times$. Zeigen Sie, dass $J_{n,\lambda^{-1}}$ die Jordan-Normalform der inversen Matrix $(J_{n,\lambda})^{-1}$ ist.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie vermöge der Jordan-Normalform, dass jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine ,,Quadratwurzel" erlaubt: Es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $B^2 = A$.

(ii) Bleibt diese Aussage richtig für nicht-invertierbare Matrizen?

Aufgabe 4. Seine $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ trigonalisierbar. Beweisen Sie durch Betrachtung der möglichen Jordan-Normalformen, dass für $n \leqslant 6$ die Matrizen A, B ähnlich sind genau dann, wenn

$$\chi_A(T) = \chi_B(T), \qquad \mu_A(T) = \mu_B(T),$$

und die Eigenwerte $\lambda \in K$ die gleichen geometrischen Multiplizitäten $m_\lambda \geq 1$ haben. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dies für $n = 7$ nicht mehr gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3.6. um 18:00 Uhr im Zettelkasten (wegen Fronleichnam).