Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 1

Aufgabe 1. Seien r, s zwei Zahlen.

(i) Drücken Sie die Diskriminante Δ der quadratischen Gleichung

$$(X - r)(X - s) = 0$$

in Abhängigkeit von r, s aus.

(ii) Wie ändert sich die Diskriminante Δ der quadratischen Gleichung

$$aX^2 + bX + c = 0,$$

wenn die Unbestimmte X durch $rY - s$ ersetzt wird?

Aufgabe 2. Seien X, Y zwei Menge und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ferner seien $A, B \subset X$ sowie $U, V \subset Y$ Teilmengen. Verifizieren Sie, dass

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \text{und} \quad f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Zeigen Sie weiterhin durch ein Gegenbeispiel, dass die erste Inklusion im Allgemeinen keine Gleichheit ist.

Aufgabe 3. Seien a, b, x, y vier Dinge. Zeigen Sie, dass

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

genau dann gilt, wenn $a = x$ und $b = y$.

(Tipp: Unterscheiden Sie die beiden Fälle $a = b$ und $a \neq b$.)

Aufgabe 4. Wir betrachten die Verknüpfung auf der Menge $\mathbb{Z}$, die durch

$$\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \longmapsto m + 2n,$$

sowie die Verknüpfung auf der Menge $V = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, welche durch

$$\boxtimes : V \times V \longrightarrow V, \quad ((a, b), (c, d)) \longmapsto (ac, b + ad)$$

gegeben ist. Sind diese Verknüpfungen assoziativ? Sind sie kommutativ? Erlauben sie ein neutrales Element?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 29.10. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits ab dem Tag der Ausgabe mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Sprechen* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben!
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in korrekten und *vollständigen* deutschen Sätzen auf!
5. Vermeiden Sie weitestgehend die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ $, \ldots$ im Text! In abgesetzten Formel sind Ausnahmen erlaubt.
6. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verfizieren!
7. Wollen Sie beweisen, dass „A genau dann gilt, wenn B gilt", müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A, dann B" sowie „wenn B, dann A" zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
8. Die Aussage „wenn A, dann B" ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht".
9. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dies so einfach wie möglich.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 2

Aufgabe 1. Seien R_1, R_2 zwei Ringe. Wir definieren auf der Produktmenge $R = R_1 \times R_2$ zwei Verknüpfungen durch

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb').$$

Verifizieren Sie, dass R dadurch zu einem Ring wird. Handelt es sich dabei um einen Körper, falls R_1, R_2 Körper sind?

Aufgabe 2. (i) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in cartesischen Koordinaten:

$$(3 - i)^{-1}, \quad \frac{1 + 2i}{3 + 4i}, \quad (1 + i)^3, \quad e^{n\pi i} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(ii) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten an:

$$1 + i, \quad i - 1, \quad i^{100}, \quad 1/e^{i\varphi} \quad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

(iii) Bestimmen Sie für die komplexe quadratische Gleichung

$$X^2 - (6 + 3i)X + (7 + 9i) = 0$$

die komplexen Lösungen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ von der Form

$$z = w/\overline{w}$$

für ein $w \in \mathbb{C}^\times$ ist.

Aufgabe 4. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge

$$\mu_n(\mathbb{C}) = \left\{\zeta \in \mathbb{C}^\times \mid \zeta^n = 1\right\} \subset \mathbb{C}^\times.$$

Verifizieren Sie, dass mit zwei Elementen ζ, ω auch das Produkt $\zeta \cdot \omega$ in $\mu_n(\mathbb{C})$ enthalten ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Menge $\mu_n(\mathbb{C})$ versehen mit der komplexen Multiplikation eine Gruppe bildet. Rechnen Sie schliesslich mittels Polarkoordinaten aus, dass diese Gruppe genau n Elementen enthält, und skizzieren Sie diese für $n = 8$ in der komplexen Zahlenebene.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 5.11. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Bitte verwenden Sie das **Deckblatt** und **tackern** Sie Ihre Abgaben!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1. Betrachten Sie die natürlichen Zahlen

$$a = \text{Ihre Matrikelnummer}, \; b = \text{Ihr Geburtsjahr}.$$

Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler

$$g = \mathrm{ggT}(a, b),$$

und finden Sie eine Darstellung $g = ra + sb$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie im Körper $\mathbb{F}_{53} = \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$ die folgenden Elemente:

$$a_1 = 34 + 63, \quad a_2 = -4, \quad a_3 = 1/2, \quad a_4 = 120^2 - 555^3, \quad a_5 = 1/3 + 1/2.$$

Dabei ist das Ergebnis als Zahl $0 \leqslant a_i < 53$ anzugeben.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für die die Primzahlen $p = 3, 5, 7, 11, 13$, welche Kongruenzklassen

$$[a] \in \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad 0 < a < p$$

Quadrate sind, indem sie jeweils eine Tabelle aller quadratischen Kongruenzklassen $[b]^2$ erstellen. Für $p = 5$ sieht eine derartige Tabelle etwa so aus:

$[b]$	1	2	3	4
$[b]^2$	1	4	4	1

Fällt Ihnen etwas über die Anzahl der Quadrate in Abhängigkeit von p auf?

Aufgabe 4. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ mit drei Elementen. In Analogie zu den komplexen Zahlen machen wir die neunelementige Menge $R = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ durch die Verknüpfungen

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

zu einem Ring, mit Nullelement $0 = (0, 0)$ und Einselement $1 = (1, 0)$. Handelt es sich bei diesem Ring um einen Körper?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12.11. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Achtung: Alle Abgaben müssen individuell, handschriftlich, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.

Das griechische Alphabet

Buchstabe		Name	Transliteration
α	A	Alpha	a
β	B	Beta	b
γ	Γ	Gamma	g
δ, ∂	Δ	Delta	d
ϵ	E	Epsilon	e
ζ	Z	Zeta	z
η	H	Eta	ē
θ, ϑ	Θ	Theta	t
ι	I	Iota	i
κ	K	Kappa	k
λ	Λ	Lambda	l
μ	M	Mu	m
ν	N	Nu	n
ξ	Ξ	Xi	x
o	O	Omikron	o
π	Π	Pi	p
ρ	P	Rho	r
σ	Σ	Sigma	s
τ	T	Tau	t
υ	Υ	Upsilon	u
ϕ, φ	Φ	Phi	ph
χ	X	Chi	kh
ψ	Ψ	Psi	ps
ω	Ω	Omega	ō

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, und

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten $\alpha_{ij} \in K$. Verifizieren Sie explizit, dass die Lösungsmenge $L \subset K^n$ ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 2. Welche der Teilmengen

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y,z) \mid x < 0\}\,, \\ U_2 &= \left\{(x,y,z) \mid 3xy = z^2\right\}\,, \\ U_3 &= \{(x,y,z) \mid 3x + 2y = -z\}\,, \\ U_4 &= \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{Q}\}\,, \\ U_5 &= \{(t, 3t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

des reellen Standdardvektorraumes $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Beweisen Sie, dass die Menge $V = \mathscr{P}(X)$ aller Teilmengen $A \subset X$ durch die Verknüpfung

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \quad (A, B) \longmapsto (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$$

zu einer abelschen Gruppe wird. Zeigen Sie ferner, dass diese abelsche Gruppe V auf genau eine Weise zu einem Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ gemacht werden kann.

Aufgabe 4. Sei $V \neq 0$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ist es möglich, dass die zugrundeliegende abelsche Gruppe V zugleich die Struktur eines $\mathbb{F}_p$-Vektorraumes für eine Primzahl $p > 0$ trägt? Gibt es Beispiele, bei denen V die Struktur eines $\mathbb{C}$-Vektorraumes besitzt?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19.11. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Wenn Sie Resultate **aus der Vorlesung zitieren** wollen, folgen Sie bitte der wissenschaftlichen Praxis und schreiben beispielsweise: ,,Wegen [Vorlesung], Proposition 3.12, gilt..."

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Wir betrachten den reellen Anschauungsraum $V = \mathbb{R}^3$ und die vier darin enthaltenen Vektoren

$$a_1 = (1, 1, 0), \quad a_2 = (1, 0, 1), \quad a_3 = (0, 1, 1), \quad a_4 = (1, 1, 1).$$

Skizzieren Sie diese Vektoren. Verifizieren Sie, dass diese vier Vektoren linear abhängig sind. Zeigen Sie schließlich, dass beim Weglassen von jeweils einem Vektor die übrigen drei linear unabhängig werden.

Aufgabe 2. Wir fassen die Funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin(x)$$

als Vektoren im reellen Vektorraum V aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf. Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\cos, \sin \in V$ linear unabhängig sind.

(Tipp: Nutzen Sie Nullstellen dieser trigonometrischen Funktionen aus.)

Aufgabe 3. Wir betrachten die ganzzahligen Vektoren

$$a = (7, 16) \quad \text{und} \quad b = (11, 30)$$

im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$. Zu jeder Primzahl $p > 0$ erhalten wir durch Übergang zu Kongruenzklassen Vektoren

$$a_p = ([7], [16]) \quad \text{und} \quad b_p = ([11], [30])$$

im $\mathbb{F}_p$-Vektorraum $\mathbb{F}_p^2$. Finden Sie durch Probieren zwei Primzahlen $p > 0$, für welche

$$a_p, b_p \in \mathbb{F}_p^2$$

ein Erzeugendensystem bilden, sowie zwei Primzahlen, für welche das nicht gilt.

Aufgabe 4. Sei V ein Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, und

$$a_1, \ldots, a_n \in V$$

Vektoren. Wir betrachten dazu die Vektoren $ia_1, \ldots, ia_n \in V$, die durch Skalarmultiplikation mit der imaginären Zahl $i \in \mathbb{C}$ entstehen. Angenommen, die n Vektoren $a_r \in V$, $1 \leqslant r \leqslant n$ sind $\mathbb{C}$-linear unabhängig. Beweisen Sie, dass die $2n$ Vektoren

$$a_1, \ldots, a_n, ia_1, \ldots, ia_n \in V$$

$\mathbb{R}$-linear unabhängig sind. Hierbei fassen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum V in kanonischer Weise auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf.

(Tipp: Machen Sie sich die Situation anhand des Spezialfalls $V = \mathbb{C}$, $n = 1$ klar.)

Abgabe: Bis Mittwoch, den 26.11. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume mit $U \cap U' = 0$. Schreibe $n = \dim(V)$, $r = \dim(U)$ und $r' = \dim(U')$. Verifizieren Sie, dass es eine Basis

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_r}, \underbrace{x_{r+1}, \ldots, x_{r+r'}}, x_{r+r'+1}, \ldots, x_n \in V$$

gibt, bei der die ersten r Vektoren eine Basis von U und die nächsten r' Vektoren eine Basis von U' bilden.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Untervektorraum $H \subset V$ mit

$$\dim(H) = \dim(V) - 1$$

nennt man auch *Hyperebene*. Sei nun $U \subset V$ ein Untervektorraum und $H \subset V$ eine Hyperebene, welche U nicht enthält. Zeigen Sie mit der Dimensionsformel, dass dann auch

$$H \cap U \subset U$$

eine Hyperebene ist. Skizzieren Sie die Situation für den Anschauungsraum $V = \mathbb{R}^3$ und $\dim(U) = 2$.

Aufgabe 3. Sei V ein eindlich-dimensionaler K-Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum und $a \in V$ ein Vektor, der nicht in U enthalten ist. Beweisen Sie mit dem Basisergänzungssatz, dass es eine Hyperebene $H \subset V$ gibt, welche den Untervektorraum U enthält, aber nicht den Vektor a.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Der Vektorraum V ist endlich-dimensional.

(ii) Jede *aufsteigende Kette* von Untervektorräumen

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

in V ist *stationär*. Mit anderen Worten, es gibt einen Index $n \geq 0$ mit

$$U_n = U_{n+1} = U_{n+2} = \dots.$$

(Tipp: Verifizieren Sie zunächst, dass für aufsteigende Ketten von Untervektorräumen die Teilmenge $\bigcup_{i \geq 0} U_i \subset V$ ein Untervektorraum ist.)

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3.12. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1. Wir betrachten die ganzzahligen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche dieser Matrizen sich miteinander oder mit sich selbst multiplizieren lassen. Rechnen Sie alle diese möglichen Matrizenprodukte explizit aus.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $\mu \in K$ ein Skalar. Wir betrachten die beiden 3×3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 8\mu^2 + 8\mu & 2\mu + 1 & 4\mu \\ 4\mu^2 + 4\mu & \mu + 1 & 2\mu + 1 \\ 4\mu^2 + 4\mu + 1 & \mu & 2\mu - 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 8\mu^2 + 10\mu + 1 & -8\mu^2 - 12\mu & -8\mu^2 - 8\mu \\ -4\mu^2 - 5\mu - 1 & 4\mu^2 + 6\mu + 1 & 4\mu^2 + 4\mu \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Matrizenprodukt

$$AB = (\epsilon_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$$

explizit aus. Erstaunt?

Aufgabe 3. Wir fassen hier $V = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ als 2-dimensionalen Vektorraum über dem Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen auf und betrachten die linearen Abbildungen

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto iz \quad \text{und} \quad g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \overline{z}.$$

Wählen Sie eine Basis, und stellen Sie bezüglich der gewählten Basis die zugehörigen reellen 2×2-Matrizen

$$A = (\alpha_{ij}) \quad \text{bzw.} \quad B = (\beta_{ij})$$

auf. Berechnen Sie schließlich die Matrizen zu den Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $f : K^m \to K^n$ eine Abbildung, und

$$\Gamma_f \subset K^m \times K^n = K^{m+n}$$

ihr Graph. Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : K^m \to K^n$ genau dann linear ist, wenn die Teilmenge $\Gamma_f \subset K^{m+n}$ ein Untervektorraum ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 10.12. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. Bringen Sie die folgenden Matrizen mit dem Gauß-Algorithmus auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Q}),$$

$$B = \begin{pmatrix} -30 & 60 & 5 & -70 & 1 \\ -67 & 134 & 11 & -157 & 2 \\ 7 & -14 & 0 & 21 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{Q}),$$

$$C = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 4+i & 4-i \\ i & 0 & -1 & -1+i \\ 1+i & 0 & -1+i & 2i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie mit dem Gauß-Algorithmus, dass eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K)$$

genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$.

(ii) Berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus, für welche Skalare $x, y, z \in K$ die 3×3-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 1 & 1-z \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(K)$$

invertierbar ist.

(Tipp: Machen Sie geeignete Fallunterscheidungen.)

Aufgabe 3. Sei $n \geq 1$. Bringen Sie die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & & & \\ 1 & -2 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & -1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$$

mit dem Gauß-Algorithmus nur mit Zeilenoperationen vom Typ II auf Zeilen-Stufen-Form.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, und

$$B, B' \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$$

zwei Matrizen in Zeilen-Stufen-Form, die aus A durch den Gauß-Algorithmus entstehen. Aufgrund der Wahlfreiheit bei der Pivot-Suche gilt im Allgemeinen $B' \neq B$.

(i) Verifizieren Sie, dass allerdings jede Zeile von B' eine Linearkombination aus den Zeilen von B sein muss.

(ii) Seien nun B, B' in *reduzierter* Zeilen-Stufen-Form, d.h. die Pivot-Element sind $\pi_1 = \ldots = \pi_r = 1$, und oberhalb der Pivot-Elemente verschwinden die Einträge. Beweisen Sie

$$B' = B$$

durch Induktion nach der Spaltenzahl $n \geq 1$ sowie Verwendung von (i).

Abgabe: Bis Mittwoch, den 17.12. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K$ Skalare. Wir betrachten das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 4X_3 & + & 3X_4 & = & \gamma_1 \\ X_1 & + & 2X_2 & + & 4X_3 & + & X_4 & = & \gamma_2 \\ X_1 & + & 2X_2 & + & 8X_3 & + & 4X_4 & = & \gamma_3. \end{array}$$

Bestimmen Sie, für welche Vektoren $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in K^3$ das Gleichungssystem eine Lösung hat, und berechnen Sie für diese Vektoren die Lösungsmenge. Geben Sie dabei eine Basis für das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem an.

Aufgabe 2. (i) Wählen Sie aus den Vektoren

$$x_1 = (1,3,1), \quad x_2 = (2,6,2), \quad x_3 = (2,10,4), \quad x_4 = (0,2,1)$$

eine Basis der linearen Hülle $\sum_{i=1}^4 \mathbb{Q}x_i \subset \mathbb{Q}^3$.

(ii) Schreiben Sie den Vektor $c = (1, i, -2) \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombination der Vektoren

$$y_1 = (1,2,0), \quad y_2 = (3,8,4), \quad y_3 = (1,4,7).$$

(iii) Sind die Vektoren

$$z_1 = (3,2,11), \quad z_2 = (1,1,2), \quad z_3 = (9,8,6)$$

in $(\mathbb{F}_{17})^3$ linear unabhängig?

(Tipp: immer wieder Gauß-Algorithmus)

Aufgabe 3. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}).$$
Wählen Sie eine Basis $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}^3$ so, dass in den Basisvektoren kein einziger Eintrag verschwindet. Berechnen Sie die Matrix $B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ zum Endomorphismus
$$A : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3, \quad x \longmapsto Ax$$
bezüglich der gewählten Basis $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}^3$.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Beweisen Sie, dass es Endomorphisen $f, g : V \to V$ gibt mit
$$U = \mathrm{Ker}(f) \quad \text{und} \quad U = \mathrm{Im}(g).$$
(Tipp: Basisergänzungssatz)

Abgabe: Bis Mittwoch, den 7.1. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Inversen der folgenden invertierbaren Matrizen über dem Körper $K = \mathbb{Q}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix und

$$\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid Ax = \lambda x \text{ für ein } x \in K^n,\ x \neq 0\} \subset K$$

ihr Spektrum, also die Menge der Eigenwerte. Sei $r \geq 0$ eine natürliche Zahl. Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn $0 \notin \sigma(A)$.

(ii) Ist A invertierbar und diagonalisierbar, so auch das Inverse A^{-1}.

(iii) Gilt $\lambda \in \sigma(A)$, folgt $\lambda^r \in \sigma(A^r)$.

(iv) Falls $A^r = 0$, so muss $\sigma(A) = \{0\}$.

(v) Gilt $A^2 = E$, dann haben wir $\sigma(A) \subset \{\pm 1\}$.

Aufgabe 3. Finden Sie heraus, welche folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_5)$ diagonalisierbar sind, indem Sie jeweils die geometrischen Multiplizitäten $m_\lambda \geq 0$ der fünf möglichen Skalare $\lambda \in \mathbb{F}_5$ betrachten.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper mit $1 \neq -1$, und $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ der Vektorraum aller 2×2-Matrizen. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto {}^tA,$$

der eine Matrix $A = (\alpha_{ij})$ auf die transponierte Matrix ${}^tA = (\alpha_{ji})$ abbildet. Beweisen Sie, dass f diagonalisierbar ist, indem Sie eine Basis aus Eigenvektoren angeben. Zeigen Sie weiterhin, dass f für den Körper $K = \mathbb{F}_2$ nicht diagonalisierbar ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14.1. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungsanmeldung: Die Anmeldung für die Prüfungen zur Linearen Algebra I werden erstmalig in elektronischer Form über das **Studierendenportal** durchgeführt. Sie finden das Studierendenportal über den Link rechtsoben auf der HHU-Homepage. Am Portal loggen Sie sich mit ihrer Universitätskennung ein. Weitere Hinweise finden sich auf der Vorlesungs-Homepage.

Anmeldefristen für die erste und zweite Klausur sind 5.–25.1. bzw. 5.1.–18.3. Nach Ablauf der Anmeldefristen ist es nicht mehr möglich, Anmeldungen entgegenzunehmen. Abmeldungen sind bis eine Woche vor der Prüfung möglich.

Etwa eine Woche vor den Prüfungen wird eine anonymisierte Liste der Studierenden ausgehängt, welche sich angemeldet haben und die Zulassungsvoraussetzungen erfüllen. **Überprüfen Sie, ob Sie dort verzeichnet sind**, da diese Liste am Prüfungstag maßgeblich ist. Angemeldete Studierende, welche die Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt haben, gelten laut PO als nicht angemeldet.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. (i) Geben Sie die Determinante der folgenden reellen 2×2-Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden 3×3-Matrizen mit der Regel von Sarrus:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B' = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

(iii) Berechnen Sie die Determinante der rationalen 4×4-Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

indem Sie die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilen-Stufen-Form bringen.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$. Schreiben Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \in S_n$$

als ein Produkt von Transpositionen. Deduzieren Sie daraus

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n+1}.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie, für welche Parameter $t \in \mathbb{Q}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

invertierbar ist, und berechnen Sie dafür mit dem Gauß-Algorithmus die inverse Matrix in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 4. Sei $\eta \in S_n$ eine Permutation. Man bezeichnet die mittels Kronecker-Delta definierte Matrix

$$P_\eta = (\delta_{i,\eta(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

als *Permutationsmatrix.* Zeigen Sie mit Hilfe der Leibniz-Formel, dass

$$\det(P_\eta) = \mathrm{sgn}(\eta)$$

gilt. Verifizieren Sie weiterhin, dass die Abbildung

$$f : S_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K), \quad \eta \longmapsto P_\eta$$

ein Homomorphismus von Gruppen ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 21.1. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut WS 14/15
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. Berechnen Sie für die folgenden komplexen Matrizen das charakteristische Polynom, finden Sie durch Probieren Nullstellen heraus, und entscheiden Sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 8 & -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} -i & 1 & -i \\ 3 & 2i & 2 \\ -2i & 1 & -i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1} \in K$ Skalare. Wir bilden dazu die sogenannte *Begleitmatrix*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & & -\mu_0 \\ 1 & 0 & & & -\mu_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -\mu_{n-2} \\ & & & 1 & -\mu_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(K).$$

Beweisen Sie mit der Laplace-Entwicklung und Induktion nach $n \geq 1$, dass das charakterische Polynom durch

$$\chi_B(T) = T^n + \mu_{n-1}T^{n-1} + \cdots + \mu_0$$

gegeben ist.

Aufgabe 3. (i) Bestimmen Sie mittels Determinante, für welche Parameter $t \in K$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix mit der Kofaktor-Matrix.

(ii) Sei $B = (\beta_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen $\beta_{ij} \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie mittels Determinante, dass für fast alle Primzahlen $p > 0$ die Matrix der Kongruenzklassen

$$B_p = ([\beta_{ij}]) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$$

invertierbar ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K).$$

Berechnen Sie die Diskriminante $\Delta \in K$ des charakteristischen Polynoms $\chi_A(T)$ und beschreiben Sie damit die Matrizen, deren Spektrum $\sigma(A) \subset K$ leer ist. Was bedeutet die Beschreibung in den Spezialfällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{F}_3$?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 28.1. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Bitte beachten Sie, dass die **Frist zur Anmeldung für die erste Klausur** am 25.1. abläuft. Die Anmeldung ist unbedingt erforderlich und erfolgt über das Studierendenportal.

Aufgrund einer Dienstanweisung der Rektorin ist es nicht mehr möglich, personenbezogene Daten auszuhängen. Informieren Sie sich bei den Übungsgruppenleiter, ob Sie auf der Liste der angemeldeten und zugelassenen Prüflingen auftauchen.

Aus gegebenem Anlass mache ich erneut darauf aufmerksam, dass ich die Verbreitung im Internet von Mitschriften zu meiner Vorlesung untersagt habe!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 1. (i) Verifizieren Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$$

eine Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen ist.

(ii) Berechnen Sie die Längen und den Winkel für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

aufgefasst als Vektoren im euklidischen Vektorraum $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Sei E ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $U, V \subset E$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie

$$(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp \quad \text{und} \quad (U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für die fünf Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_5)$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$ und entscheiden Sie, ob A trigonalisierbar oder diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ aller Kongruenzklassen $[a]$ modulo $n = 3$ und den K-Vektorraum V aller Abbildungen $v : G \to K$. Darauf haben wir den Endomorphismus $f : V \to V$, welcher durch

$$f(v)([i]) = v([i + 1])$$

gegeben wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ und diskutieren Sie, unter welchen Voraussetzungen an den Körper K der Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ trigonalisierbar ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 4.2. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.