

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. Berechnen Sie für die folgenden komplexen Matrizen das charakteristische Polynom, finden Sie durch Probieren Nullstellen heraus, und entscheiden Sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 8 & -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} -i & 1 & -i \\ 3 & 2i & 2 \\ -2i & 1 & -i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $\mu_0, \dots, \mu_{n-1} \in K$ Skalare. Wir bilden dazu die sogenannte *Begleitmatrix*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & -\mu_0 \\ 1 & 0 & & -\mu_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -\mu_{n-2} \\ & & & 1 & -\mu_{n-1} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_n(K).$$

Beweisen Sie mit der Laplace-Entwicklung und Induktion nach $n \geq 1$, dass das charakteristische Polynom durch

$$\chi_B(T) = T^n + \mu_{n-1}T^{n-1} + \dots + \mu_0$$

gegeben ist.

Aufgabe 3. (i) Bestimmen Sie mittels Determinante, für welche Parameter $t \in K$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix mit der Kofaktor-Matrix.

(ii) Sei $B = (\beta_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{Q})$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen $\beta_{ij} \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie mittels Determinante, dass für fast alle Primzahlen $p > 0$ die Matrix der Kongruenzklassen

$$B_p = ([\beta_{ij}]) \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$$

invertierbar ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(K).$$

Berechnen Sie die Diskriminante $\Delta \in K$ des charakteristischen Polynoms $\chi_A(T)$ und beschreiben Sie damit die Matrizen, deren Spektrum $\sigma(A) \subset K$ leer ist. Was bedeutet die Beschreibung in den Spezialfällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{F}_3$?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 28.1. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Bitte beachten Sie, dass die **Frist zur Anmeldung für die erste Klausur** am 25.1. abläuft. Die Anmeldung ist unbedingt erforderlich und erfolgt über das Studierendenportal.

Aufgrund einer Dienstanweisung der Rektorin ist es nicht mehr möglich, personenbezogene Daten auszuhängen. Informieren Sie sich bei den Übungsgruppenleiter, ob Sie auf der Liste der angemeldeten und zugelassenen Prüflingen auftauchen.

Aus gegebenem Anlass mache ich erneut darauf aufmerksam, dass ich die Verbreitung im Internet von Mitschriften zu meiner Vorlesung untersagt habe!