Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. Bringen Sie die folgenden Matrizen mit dem Gauß-Algorithmus auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Q}),$$

$$B = \begin{pmatrix} -30 & 60 & 5 & -70 & 1 \\ -67 & 134 & 11 & -157 & 2 \\ 7 & -14 & 0 & 21 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{Q}),$$

$$C = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 4+i & 4-i \\ i & 0 & -1 & -1+i \\ 1+i & 0 & -1+i & 2i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie mit dem Gauß-Algorithmus, dass eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K)$$

genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$.

(ii) Berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus, für welche Skalare $x, y, z \in K$ die 3×3-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 1 & 1-z \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(K)$$

invertierbar ist.

(Tipp: Machen Sie geeignete Fallunterscheidungen.)

Aufgabe 3. Sei $n \geq 1$. Bringen Sie die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & & & \\ 1 & -2 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & -1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$$

mit dem Gauß-Algorithmus nur mit Zeilenoperationen vom Typ II auf Zeilen-Stufen-Form.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, und

$$B, B' \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$$

zwei Matrizen in Zeilen-Stufen-Form, die aus A durch den Gauß-Algorithmus entstehen. Aufgrund der Wahlfreiheit bei der Pivot-Suche gilt im Allgemeinen $B' \neq B$.

(i) Verifizieren Sie, dass allerdings jede Zeile von B' eine Linearkombination aus den Zeilen von B sein muss.

(ii) Seien nun B, B' in *reduzierter* Zeilen-Stufen-Form, d.h. die Pivot-Element sind $\pi_1 = \ldots = \pi_r = 1$, und oberhalb der Pivot-Elemente verschwinden die Einträge. Beweisen Sie

$$B' = B$$

durch Induktion nach der Spaltenzahl $n \geq 1$ sowie Verwendung von (i).

Abgabe: Bis Mittwoch, den 17.12. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.