Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1. Wir betrachten die ganzzahligen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche dieser Matrizen sich miteinander oder mit sich selbst multiplizieren lassen. Rechnen Sie alle diese möglichen Matrizenprodukte explizit aus.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $\mu \in K$ ein Skalar. Wir betrachten die beiden 3×3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 8\mu^2 + 8\mu & 2\mu + 1 & 4\mu \\ 4\mu^2 + 4\mu & \mu + 1 & 2\mu + 1 \\ 4\mu^2 + 4\mu + 1 & \mu & 2\mu - 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 8\mu^2 + 10\mu + 1 & -8\mu^2 - 12\mu & -8\mu^2 - 8\mu \\ -4\mu^2 - 5\mu - 1 & 4\mu^2 + 6\mu + 1 & 4\mu^2 + 4\mu \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Matrizenprodukt

$$AB = (\epsilon_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$$

explizit aus. Erstaunt?

Aufgabe 3. Wir fassen hier $V = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ als 2-dimensionalen Vektorraum über dem Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen auf und betrachten die linearen Abbildungen

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto iz \quad \text{und} \quad g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \overline{z}.$$

Wählen Sie eine Basis, und stellen Sie bezüglich der gewählten Basis die zugehörigen reellen 2×2-Matrizen

$$A = (\alpha_{ij}) \quad \text{bzw.} \quad B = (\beta_{ij})$$

auf. Berechnen Sie schließlich die Matrizen zu den Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $f : K^m \to K^n$ eine Abbildung, und

$$\Gamma_f \subset K^m \times K^n = K^{m+n}$$

ihr Graph. Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : K^m \to K^n$ genau dann linear ist, wenn die Teilmenge $\Gamma_f \subset K^{m+n}$ ein Untervektorraum ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 10.12. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.