Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Wir betrachten den reellen Anschauungsraum $V = \mathbb{R}^3$ und die vier darin enthaltenen Vektoren

$$a_1 = (1,1,0), \quad a_2 = (1,0,1), \quad a_3 = (0,1,1), \quad a_4 = (1,1,1).$$

Skizzieren Sie diese Vektoren. Verifizieren Sie, dass diese vier Vektoren linear abhängig sind. Zeigen Sie schließlich, dass beim Weglassen von jeweils einem Vektor die übrigen drei linear unabhängig werden.

Aufgabe 2. Wir fassen die Funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin(x)$$

als Vektoren im reellen Vektorraum V aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf. Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\cos, \sin \in V$ linear unabhängig sind.

(Tipp: Nutzen Sie Nullstellen dieser trigonometrischen Funktionen aus.)

Aufgabe 3. Wir betrachten die ganzzahligen Vektoren

$$a = (7, 16) \quad \text{und} \quad b = (11, 30)$$

im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$. Zu jeder Primzahl $p > 0$ erhalten wir durch Übergang zu Kongruenzklassen Vektoren

$$a_p = ([7], [16]) \quad \text{und} \quad b_p = ([11], [30])$$

im $\mathbb{F}_p$-Vektorraum $\mathbb{F}_p^2$. Finden Sie durch Probieren zwei Primzahlen $p > 0$, für welche

$$a_p, b_p \in \mathbb{F}_p^2$$

ein Erzeugendensystem bilden, sowie zwei Primzahlen, für welche das nicht gilt.

Aufgabe 4. Sei V ein Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, und

$$a_1, \ldots, a_n \in V$$

Vektoren. Wir betrachten dazu die Vektoren $ia_1, \ldots, ia_n \in V$, die durch Skalarmultiplikation mit der imaginären Zahl $i \in \mathbb{C}$ entstehen. Angenommen, die n Vektoren $a_r \in V$, $1 \leqslant r \leqslant n$ sind $\mathbb{C}$-linear unabhängig. Beweisen Sie, dass die $2n$ Vektoren

$$a_1, \ldots, a_n, ia_1, \ldots, ia_n \in V$$

$\mathbb{R}$-linear unabhängig sind. Hierbei fassen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum V in kanonischer Weise auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf.

(Tipp: Machen Sie sich die Situation anhand des Spezialfalls $V = \mathbb{C}$, $n = 1$ klar.)

Abgabe: Bis Mittwoch, den 26.11. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.