Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1. Betrachten Sie die natürlichen Zahlen

$$a = \text{Ihre Matrikelnummer}, \; b = \text{Ihr Geburtsjahr}.$$

Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler

$$g = \mathrm{ggT}(a, b),$$

und finden Sie eine Darstellung $g = ra + sb$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie im Körper $\mathbb{F}_{53} = \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$ die folgenden Elemente:

$$a_1 = 34 + 63, \quad a_2 = -4, \quad a_3 = 1/2, \quad a_4 = 120^2 - 555^3, \quad a_5 = 1/3 + 1/2.$$

Dabei ist das Ergebnis als Zahl $0 \leqslant a_i < 53$ anzugeben.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für die die Primzahlen $p = 3, 5, 7, 11, 13$, welche Kongruenzklassen

$$[a] \in \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad 0 < a < p$$

Quadrate sind, indem sie jeweils eine Tabelle aller quadratischen Kongruenzklassen $[b]^2$ erstellen. Für $p = 5$ sieht eine derartige Tabelle etwa so aus:

$[b]$	1	2	3	4
$[b]^2$	1	4	4	1

Fällt Ihnen etwas über die Anzahl der Quadrate in Abhängigkeit von p auf?

Aufgabe 4. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ mit drei Elementen. In Analogie zu den komplexen Zahlen machen wir die neunelementige Menge $R = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ durch die Verknüpfungen

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

zu einem Ring, mit Nullelement $0 = (0, 0)$ und Einselement $1 = (1, 0)$. Handelt es sich bei diesem Ring um einen Körper?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12.11. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Achtung: Alle Abgaben müssen individuell, handschriftlich, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.

Das griechische Alphabet

Buchstabe		Name	Transliteration
α	A	Alpha	a
β	B	Beta	b
γ	Γ	Gamma	g
δ, ∂	Δ	Delta	d
ϵ	E	Epsilon	e
ζ	Z	Zeta	z
η	H	Eta	ē
θ, ϑ	Θ	Theta	t
ι	I	Iota	i
κ	K	Kappa	k
λ	Λ	Lambda	l
μ	M	Mu	m
ν	N	Nu	n
ξ	Ξ	Xi	x
o	O	Omikron	o
π	Π	Pi	p
ρ	P	Rho	r
σ	Σ	Sigma	s
τ	T	Tau	t
υ	Υ	Upsilon	u
ϕ, φ	Φ	Phi	ph
χ	X	Chi	kh
ψ	Ψ	Psi	ps
ω	Ω	Omega	ō