Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei X ein metrischer Raum. Verifizieren Sie, dass die Teilmenge

$$U_{a,\epsilon} = \{x \in X \mid d(x,a) < \epsilon\}$$

mit $a \in X$ und $\epsilon > 0$ tatsächlich die Basis einer Topologie bilden. Diese wird die *metrische Topologie* genannt.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, und Y die Menge aller nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X$. Sind $U_0, \ldots, U_n \subset X$ offen, so definieren wir die Teilmenge

$$V_{U_0,\ldots,U_n} = \left\{ A \in Y \mid A \cap U_i \neq \emptyset \quad \forall 0 \leqslant i \leqslant n, \text{ und } A \subset \bigcup_{i=0}^{n} U_i \right\}$$

von Y. Zeigen Sie, dass diese Teilmengen die Basis einer Topologie auf Y bilden. Diese wird als die *Vietoris-Topologie* bezeichnet.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum. Eine reelle Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben halbstetig*, wenn es zu jedem $a \in X$ und jedem $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung $a \in U \subset X$ gibt so, dass $f(x) < f(a) + \epsilon$ für alle $x \in U$. Geben Sie eine Topologie $\mathcal{T}$ auf der Menge $\mathbb{R}$ an, für welche die nach oben halbstetigen Funktionen genau die stetigen Abbildungen sind.

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Sein *Spektrum* $\mathrm{Spec}(R)$ ist die Menge aller Primideale $\mathfrak{p} \subset R$. Ist $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, so bezeichnet man mit $V(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{Spec}(R)$ die Menge aller Primideale, welche $\mathfrak{a}$ enthalten.

(i) Zeigen Sie, daß die $V(\mathfrak{a})$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathrm{Spec}(R)$ bilden. Man bezeichnet diese Topologie als die *Zariski-Topologie*.

(ii) Sei $\varphi : R' \to R$ ein Ringhomomorphismus. Weisen Sie nach, daß die Abbildung

$$f : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R'), \quad \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

wohldefiniert und stetig ist.

Abgabe: Bis Montag, den 28.10. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungen: Die *Zulassungsvoraussetzung* zur Teilnahme an der Prüfung ist das Erreichen von 40% auf den 13 Übungsblättern, also $84 = \lceil 13 \times 16 \times 0,4 \rceil$ Punkte.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum. Verifizieren Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{Q}$ konstant sein muss.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie eine absteigende Folge von wegzusammenhängenden Teilmengen

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$$

im $\mathbb{R}^2$, deren Durchschnitt $X = \bigcap_{i=0}^{\infty} X_i$ unzusammenhängend ist.

Aufgabe 3. Sei X eine unendliche Menge, versehen mit der Topologie zur Subbasis aller Teilmengen der Form $U_a = X \smallsetminus \{a\}$, $a \in X$. Zeigen Sie, dass jede nichtleere offenen Teilmenge $V \subset X$ dicht und zusammenhängend ist.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Teilmenge. Beweisen Sie, dass U auch wegzusammenhängend ist.

Abgabe: Bis Montag, den 4.11. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 3

Aufgabe 1. Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Welche der folgenden Teilräume von $\mathbb{R}$ sind homöomorph, welche nicht?

$$U =]a,b[\quad \text{und} \quad A = [a,b] \quad \text{und} \quad L = [a,b[\quad \text{und} \quad R =]a,b]$$

Aufgabe 2. Verifizieren Sie:

(i) Ein endlicher Raum, der hausdorffsch ist, muss diskret sein.

(ii) Ein diskreter Raum, der quasikompakt ist, muss endlich sein.

(iii) Ein Raum, der Vereinigung von endlich vielen quasikompakten Teilmenge ist, muss quasikompakt sein.

(iv) Produkte von Hausdorff-Räumen sind hausdorffsch.

Aufgabe 3. Sei X ein Hausdorff-Raum und $A, B \subset X$ zwei kompakte Teilmengen mit $A \cap B = \emptyset$.

(i) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $A \subset U$ und $B \subset V$ mit $U \cap V = \emptyset$ gibt.

(ii) Bleibt diese Aussage richtig, falls X nicht mehr hausdorffsch ist?

Aufgabe 4. Sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, der nicht kompakt ist, ∞ ein formales Symbol, und $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$ die disjunkte Vereinigung. Wir definieren auf der Menge $\bar{X}$ eine Topologie, indem wir deklarieren:

$$U \subset \bar{X} \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad U = \begin{cases} V \text{ mit } V \subset X \text{ offen;} \\ (X \setminus K) \cup \{\infty\} \text{ mit } K \subset X \text{ kompakt.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass dies tatsächlich eine Toplogie ist, $X \subset \bar{X}$ eine offenen dichte Teilmenge ist, und dass $\bar{X}$ kompakt ist. Man bezeichnet $\bar{X}$ auch als die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* oder *Alexandroff-Kompaktifizierung* von X. Zeigen Sie weiterhin, dass die Alexandroff-Kompaktifizierung des Standardvektorraumes $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ homöomorph zur Standardsphäre S^n ist.

Abgabe: Bis Montag, den 11.11. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungen: Es werden *mündliche* Prüfungen im Anschluss an die Vorlesungszeit und zum Ende des Semesters stattfinden. Voraussichtliche Prüfungstermine: Dienstag, den 11.2. und 1.4.2014.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 4

Aufgabe 1. Die Einheitengruppe $G = \mathbb{R}^\times$ wirkt auf der punktierten reellen Ebene $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ durch

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (\lambda, (x, y)) \longmapsto (\lambda x, \lambda^{-1} y).$$

Skizzieren Sie die Bahnen $G(x, y) \subset X$ und verifizieren Sie, dass der Bahnenraum $Y = X/G$ nicht hausdorffsch ist.

Aufgabe 2. Seien X, Y zwei Hausdorff-Räume, und $A \subset X$, $B \subset Y$ zwei abgeschlossene Unterräume, und $\varphi : A \to B$ ein Homöomorphismus. Verifizieren Sie, dass die zugehörige Verklebung $Z = X \cup_\varphi Y$ ebenfalls hausdorffsch ist. Bleibt diese Aussage für beliebige Unterräume $A \subset X$, $B \subset Y$ richtig?

Aufgabe 3. Die Einheitengruppe $\mathbb{C}^\times$ wirkt durch Skalarmultiplikation auf dem komplexen Standardvektorraum $\mathbb{C}^{n+1}$, wobei der Ursprung $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ein Fixpunkt ist. Zeigen Sie, dass der Bahnenraum

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$$

eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ ist.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie, dass es eine surjektive stetige Abbildung $q : X \to Y$ in einen Hausdorff-Raum Y gibt, die folgende universelle Eigenschaft hat: Zu jeder stetigen Abbildung $f : X \to H$ in einen Hausdorff-Raum H gibt es genau eine stetige Abbildung $g : Y \to H$ mit $f = g \circ q$. Mit anderen Worten, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[rr, dotted, "g"'] & & H \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Abgabe: Bis Montag, den 18.11. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 5

Aufgabe 1. Geben Sie zeichnerisch Triangulierungen der Sphäre S^2, des Torus T^2 und des projektiven Raums P^2 an.

Aufgabe 2. Verifizieren Sie, dass die geometrische Realisierung simplizialer Komplexe funktoriell ist: Seien $K = (V, S)$ und $K' = (V', S')$ zwei simpliziale Komplexe, und $f : V \to V'$ eine Abbildung so, dass für jeden Simplex $\sigma \subset V$ von K das Bild $f(\sigma) \subset V'$ eine Simplex von K' ist. Konstruieren Sie dazu eine stetige Abbildung

$$|f| : |K| \longrightarrow |K'|$$

derart, dass $|\operatorname{id}_V| = \operatorname{id}_{|K|}$ und $|f \circ g| = |f| \circ |g|$ gelten.

Aufgabe 3. Sei X eine nichtleere 1-Mannigfaltikeit, und $\varphi : X \to |K|$ eine Triangulierung, wobei $K = (V, S)$ ein endlich-dimensionaler simplizaler Komplex ist. Zeigen Sie, dass dann $\dim(K) = 1$ gelten muss, und dass jede Ecke $v \in V$ in genau zwei 1-Simplices $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ enthalten ist.

Aufgabe 4. Sei $K = (V, S)$ ein endlicher simplizialer Komplex von Dimension $n = \dim(K)$. Beweisen Sie, dass die geometrische Realisierung $X = |K|$ homöomorph zu einem Unterraum des $\mathbb{R}^{2n+1}$ ist.

Abgabe: Bis Montag, den 25.11. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

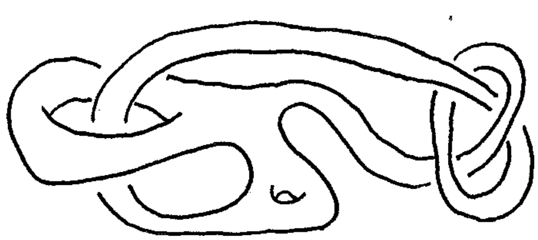
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 6

Aufgabe 1. Welche 2-Mannigfaltigkeit ist hier abgebildet?



Aufgabe 2. Die *Kleinsche Flasche* ist die 2-Mannigfaltigkeit X zum Flächenwort $aba^{-1}b$. Beschreiben Sie anschaulich die zugehörige Quotientenbildung aus dem regulären 4-Eck, und bringen Sie das Flächenwort auf die Normalform $z_1^2z_2^2$.

Aufgabe 3. Welche 2-Mannigfaltigkeit wird durch das Flächenwort

$$abcda^{-1}bc^{-1}d$$

geliefert?

Aufgabe 4. Sei X eine kompakte, zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit. Angenommen, das Komplement $X \smallsetminus \{a\}$ eines Punktes $a \in X$ ist homöomorph zum $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass dann X homöomorph zur Sphäre S^2 sein muss. Folgern sie daraus $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$.

Abgabe: Bis Montag, den 2.12. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ eine Überdeckung. Wir nehmen an, dass es sich dabei entweder um eine beliebige offene Überdeckung handelt, oder um eine endliche abgeschlossene Überdeckung. Seien $f_i : X_i \to T$, $i \in I$ stetige Abbildungen, die auf den Überlappungen übereinstimmen, also

$$f_i|_{X_i\cap X_j} = f_j|_{X_i\cap X_j} \quad \forall i,j \in I.$$

Verifizieren Sie, dass es genau eine stetige Abbildung $f : X \to T$ so, dass $f|_{X_i} = f_i$ für alle $i \in I$. (Bei der Definition von Homotopien mittels Fallunterscheidungen wird diese Tatsache für endliche abgeschlossene Überdeckungen immer wieder verwendet.)

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $w : I \to X$ ein Weg von $a \in X$ nach $b \in X$. Zeigen Sie explizit, dass die Zusammensetzung $w^{-1} \star w$ homotop zur konstanten Schleife $t \mapsto a$ ist.

Aufgabe 3. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Weisen Sie nach, dass $\pi_1(X,a) = \{e\}$ genau dann gilt, wenn sich jede stetige Abbildung $f : S^1 \to X$ zu einer stetigen Abbildung $F : B^2 \to X$ fortsetzen läßt.

Aufgabe 4. Sei G eine topologische Gruppe und $e \in G$ das neutrale Element. Benutzen Sie die Gruppenstruktur $G \times G \to G$, um zu beweisen, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G,e)$ kommutativ sein muss.

Abgabe: Bis Montag, den 9.12. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

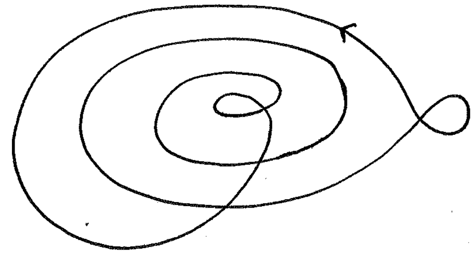
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $w : I \to \mathbb{C}$ die abgebildete Schleife. Zeichnen Sie die Windungszahlen $n(w, b)$ in die entsprechenden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus w(I)$ an.



Aufgabe 2. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und

$$f_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, b), \quad b = f(a)$$

die induzierte Abbildung zwischen den Fundamentalgruppen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) f injektiv impliziert f_* injektiv.

(ii) f surjektiv impliziert f_* surjektiv.

(iii) f hat stetiges Linksinverses impliziert f_* injektiv.

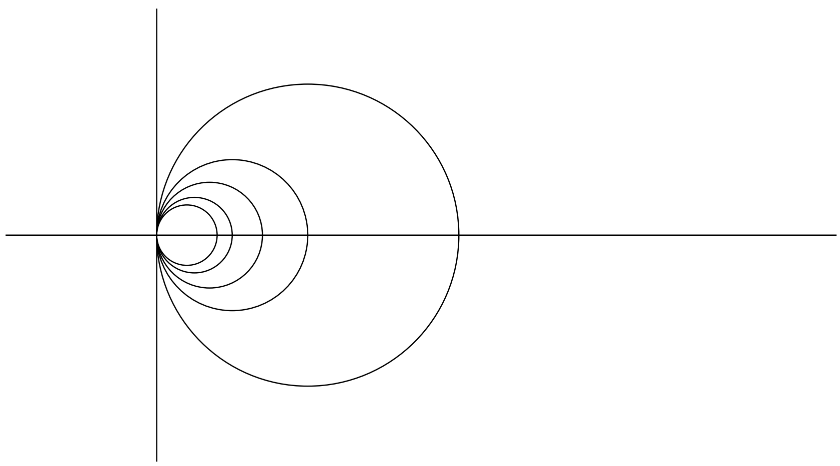
(iv) f hat stetiges Rechtsinverse impliziert f_* surjektiv.

Aufgabe 3. Sei X eine wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 2$. Sei $a \in X$ ein Fußpunkt und $U = X \smallsetminus \{b\}$ das Komplement eines weiteren Punktes $b \neq a$. Zeigen Sie, dass der von der Inklusion induzierte Homomorphismus

$$\pi_1(U, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

surjektiv ist.

Aufgabe 4. Sei $X_n \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis um den Punkt $x_n = (1/n, 0)$ mit Radius $1/n$, und $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ deren Vereinigung, versehen mit der Unterraumtopologie. Als Fußpunkt sei $a = (0, 0)$ gewählt. Beweisen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, a)$ nicht endlich erzeugt sein kann.



Abgabe: Bis Montag, den 16.12. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 9

Aufgabe 1. Verifizieren Sie in der Kategorie (Top) der topologischen Räume die folgenden Aussagen mithilfe von Fundamentalgruppen:

(i) Die Exponentialabbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto e^{2\pi iz}$ hat keinen Schnitt.

(ii) Die Inklusionsabbildung $\iota : S^1 \to D^2$, $x \mapsto x$ erlaubt keinen Retraktion.

Aufgabe 2. Hier bezeichne $\pi_0(X)$ die Menge der Wegkomponenten eines topologischen Raumes X. Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$X \longmapsto \pi_0(X)$$

in kanonischer Weise zu einem Funktor $(\mathsf{Top}) \to (\mathsf{Set})$ gemacht werden kann.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei X ein Hausdorff-Raum und A eine dichte Teilmenge. Die Inklusionsabbildung $A \to X$ ist eine Epimorphismus in der Kategorie der Hausdorff-Räume.

(ii) Sei R ein integrer Ring und K der Körper seiner Brüche. Die Inklusionsabbildung $R \to K$ ist ein Epimorphismus in der Kategorie (Ring) der Ringe.

(iii) In der Kategorie (Grp) der Gruppen sind die Epimorphismen genau die surjektiven Gruppenhomomorphismen $G \to H$.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Gegeben seien Objekte X, Y, A und Morphismen

$$X \xleftarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} Y \qquad (*)$$

in $\mathcal{C}$. Unter einer *amalgamierten Summe* versteht man ein Objekt S, zusammen mit Morphismen $i : X \to S$ und $j : Y \to S$ so, dass $i \circ \varphi = j \circ \psi$ und folgende *universelle Eigenschaft* gilt: Zu jedem Objekt T und jedem kommutativen Diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "j'"] \\ X \arrow[r, "i'"'] & T \end{tikzcd}$$

gibt es genau einen Morphismus $f : S \to T$ so, dass $f \circ i = i'$ und $f \circ j = j'$. Man schreibt dafür auch $S = X \amalg_A Y$.

Konstruieren Sie in den Kategorien

$$\mathcal{C} = (\mathsf{Set}), \quad \mathcal{C} = (\mathsf{Top}), \quad \mathcal{C} = (\mathsf{Ab}), \quad \mathcal{C} = (\mathsf{Ring})$$

amalagamierte Summen zu beliebigen vorgegebenen $(*)$.

Abgabe: Bis Montag, den 6.1 um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut WS 13/14
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 10

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass jedes nichttriviale Element einer freien Gruppe unendliche Ordnung hat.

Aufgabe 2. Seien X und Y zwei Mengen. Angenommen, die zugehörigen freien Gruppen $F(X)$ und $F(Y)$ sind als abstrakte Gruppen isomorph. Beweisen Sie, dass dann die Mengen X und Y die gleiche Kardinalität haben.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe mit endlicher Präsentation

$$G = \langle x_1, \ldots, x_m \mid r_1, \ldots, r_n \rangle.$$

Angenommen, es gilt $m > n$. Folgern Sie, dass G unendlich sein muss.

Aufgabe 4. Sei $Q \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe, welche auch die *Quaternionengruppe* genannt wird. Finden Sie eine explizite endliche Präsentation von Q.

Abgabe: Bis Montag, den 13.1. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 11

Aufgabe 1. Welche Fundamentalgruppen haben die Buchstaben

$$A, B, C, \ldots, Z,$$

aufgefasst als Teilräume im $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 2. Seien X, Y zwei kompakte, zusammenhängende, nichtleere 2-Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Räume X und Y sind homöomorph.

(ii) Die Räume X und Y sind homotopieäquivalent.

(iii) Die Gruppen $\pi_1(X, a)$ und $\pi_1(Y, b)$ sind isomorph.

(iv) Die abelschen Gruppen $H_1(X)$ und $H_1(Y)$ sind isomorph.

(v) Die beiden $\mathbb{F}_p$-Vektorräume $H_1(X, \mathbb{F}_p)$ und $H_1(Y, \mathbb{F}_p)$ haben die gleiche Dimension, für $p = 2$ und $p = 3$.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen einen topologischen Raum X, dessen Fundamentalgruppe $\pi_1(X, a)$ zyklisch von Ordnung drei ist.

Aufgabe 4. Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 3$, und $U = X \smallsetminus \{b\}$ das Komplement eines Punktes $b \in X$. Sei $a \in U$ ein Fußpunkt. Beweisen Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen, dass die kanonische Abbildung

$$\pi_1(U, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

bijektiv ist.

Abgabe: Bis Montag, den 20.1. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, der zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist. Verifizieren Sie, dass X auch wegzusammenhängend sein muss.

Aufgabe 2. Seien $p : X \to B$ und $q : Y \to B$ zwei Überlagerungen eines Raumes B. Zeigen Sie, dass auch die Summe $X \amalg Y$ und das Faserprodukt

$$X \times_B Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid p(x) = q(y)\},$$

versehen mit den offensichtlichen Projektionen, Überlagerungen von B sind.

Aufgabe 3. Sei $B = P^m \times P^n \times P^k$, wobei $m, n, k \geq 2$. Wie viele Isomorphieklassen von Überlagerungen $p : X \to B$ mit nichtleerem zusammenhängendem Totalraum gibt es?

Aufgabe 4. Sei B eine kompakte zusammenhängende nichtleere 2-Mannigfaltigkeit, die nicht homöomorph zu S^2 oder P^2 ist. Beweisen Sie, dass es unendlich viele Isomorphieklassen von Überlagerungen $p : X \to B$ mit nichtleerem zusammenhängendem Totalraum gibt.

Abgabe: Bis Montag, den 27.1. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 13

Aufgabe 1. Wie viele Überlagerungen $p : X \to P^2$ vom Grad $d = 2$ mit zusammenhängendem Totalraum gibt es bis auf Isomorphie?

Aufgabe 2. Wie viele Überlagerungen $p : X \to T^2$ vom Grad $d = 2$ mit zusammenhängendem Totalraum gibt es bis auf Isomorphie?

Aufgabe 3. Sei $X = S^2$ die 2-Sphäre, $B = P^2$ der entsprechende projektive Raum, und $p : X \to B$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass das Faserprodukt

$$X \times_B X = \{(x, y) \mid x, y \in X \text{ und } p(x) = p(y)\}$$

nicht zusammenhängend ist, indem sie den Hauptsatz der Überlagerungstheorie anwenden.

Aufgabe 4. Sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall. Beweisen Sie mit elementaren Methoden, dass jede Überlagerung $p : X \to I \times I$ global trivial ist.

Abgabe: Bis Montag, den 3.2. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.