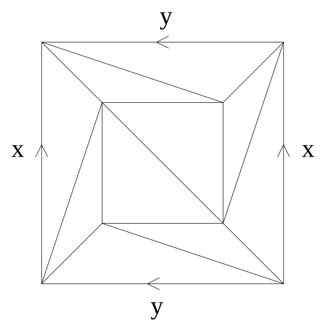
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 1

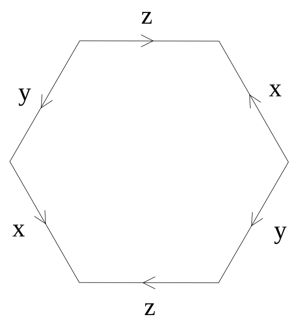
Aufgabe 1. Der Torus T^2 entsteht aus dem Viereck durch die angegebene Identifizierung. Warum liefert die abgebildete Triangulierung des Vierecks keine Triangulierung des Torus?



Aufgabe 2. Welche der 2-Mannigfaltigkeit

$$S^2 \qquad \text{oder} \qquad \#_{i=1}^{g} T^2 \qquad \text{oder} \qquad \#_{i=1}^{n} P^2$$

entsteht aus dem Sechseck durch die angegebene Identifizierung?



Aufgabe 3. Finden Sie Triangulierungen des Torus T^2 mit nur 14 Dreiecken, sowie eine des projektiven Raumes P^2 mit nur 10 Dreiecken.

Aufgabe 4. Sei $K = (V, E)$ ein simplizialer Komplex mit geometrischer Realisierung $X = |K|$. Beweisen Sie, dass K endlich ist genau dann, wenn der Raum X kompakt ist.

Abgabe: Bis Montag, den 22.10.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

Prüfungen: Es werden *mündliche* Prüfungen am Ende der Vorlesungszeit und am Ende des Semesters stattfinden. *Zulassungsvoraussetzung* ist das Erreichen von 20% auf den 12 Übungsblättern, also $39 = \lceil 12 \times 16 \times 0,2 \rceil$ Punkte.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 2

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Vektorraumdimensionen

$$\dim_F H_i(K, F), \quad i \geq 0$$

eines simiplizialen Komplexes $K = (V, S)$ hängen nicht von dem Koeffizientenkörper F ab.

Aufgabe 2. Sei $K = (V, S)$ ein simplizialer Komplex und R ein Koeffizientenring. Verifizieren Sie, dass die Randabbildung $C'_i(K, R) \to C'_{i-1}(K, R)$,

$$[v_0, \ldots, v_i] \longmapsto \sum_{j=0}^{i} (-1)^j [v_0, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_i]$$

für orientierte Simplices wohldefiniert ist.

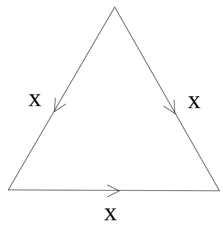
Aufgabe 3. Sei

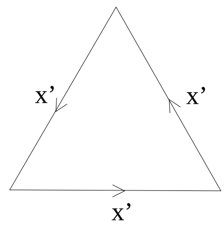
$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

ein Komplex von endlich-dimensionalen Vektorräumen über einem Körper k, und H_i seine Homologiegruppen. Zeigen Sie die Formel

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k(H_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k(C_i).$$

Aufgabe 4. Betrachten Sie die aus den Dreicken durch die angegebenen Identifizierung der Seiten entstehenden topologischen Räume X und X'.





Wählen Sie Triangulierungen $X = |K|$ und $X' = |K'|$ und berechnen Sie dazu die Homologiegruppen $H_i(K, R)$ und $H_i(K', R)$ bezüglich der Primkörper $R = \mathbb{Q}$ und $R = \mathbb{F}_p$.

Abgabe: Bis Montag, den 29.10.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 3

Aufgabe 1. Finden Sie zwei Komplexe $M^\bullet$, $N^\bullet$ zusammen mit einen Morphismus $f : M^\bullet \to N^\bullet$ so, dass die induzierten Abbildungen

$$H^p(f) : H^p(M^\bullet) \longrightarrow H^p(N^\bullet)$$

auf allen Kohomologiegruppen bijektiv sind, der Morphismus f jedoch keine Homotopieäquivalenz ist.

Aufgabe 2. (i) Seien $M^\bullet$, $N^\bullet$ zwei Komplexe. Verifizieren Sie, dass die Homotopierelation auf $\mathrm{Hom}(M^\bullet, N^\bullet)$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Seien X, Y zwei Räume. Zeigen Sie ebenfalls, dass die Homotopierelation auf $\mathrm{Hom}(X, Y)$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3. (i) Sei $r \geq 0$ eine natürliche Zahlen, und $X \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge aller Matrizen vom Rang $\leqslant r$. Was sind die Kohomologiegruppen $H^p(X, R)$, $p \geq 0$?

(ii) Sei $Y = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge aller orthogonalen Matrizen. Bestimmen Sie die Kohomologiegruppe $H^0(Y, R)$.

Aufgabe 4. Sei Y ein topologischer Raum, und

$$X = \mathrm{Hom}(I, Y)$$

die Menge aller Wege $w : I \to Y$, versehen mit der kompakt-offen-Topologie. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$f : X \longrightarrow Y, \quad w \longmapsto w(0)$$

eine Homotopieäquivalenz ist.

Abgabe: Bis Montag, den 05.11.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und $n \geq 0$. Drücken Sie die Kohomologiegruppen $H^p(X \times S^n, R)$ durch die Kohomologiegruppen von $H^q(X, R)$ aus.

Aufgabe 2. Die *Suspension* SX eines topologischen Raumes X entsteht aus $X \times I$, indem die Teilmengen $X \times \{0\}$ und $X \times \{1\}$ zu Punkten identifiziert werden. Drücken Sie die Kohomologiegruppen $H^p(SX, R)$ der Suspension durch die Kohomologiegruppen $H^q(X, R)$ aus.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum mit nur endlich vielen Punkten und R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass die Kohomologiegruppen $H^p(X, R)$, $p \geq 0$ eindlich erzeugte R-Moduln sind, welche fast alle verschwinden.

Aufgabe 4. Wir fassen den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}$ als Unterraum der komplexen Zahlenebene auf. Sei n eine ganze Zahl. Zeigen Sie mit Mayer–Vietoris-Sequenzen, dass der von

$$f : S^1 \longrightarrow S^1, \quad z \longmapsto z^n$$

induzierte Endomorphismus auf $H^1(S^1, R)$ die Multiplikation mit n ist.

Abgabe: Bis Montag, den 12.11.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

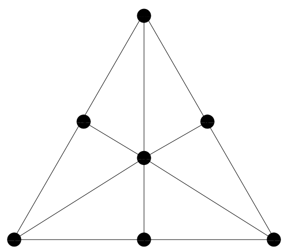
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 5

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass die baryzentrische Unterteilung des Standard-p-Simplexes $\Delta^p \subset \mathbb{R}^{p+1}$ genau $(p+1)!$ singuläre p-Simplizes liefert.



Aufgabe 2. Sei $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. In der Vorlesung konstruierten wir die lange Kohomologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H^{p-1}(C^\bullet) \longrightarrow H^p(A^\bullet) \longrightarrow H^p(B^\bullet) \longrightarrow H^p(C^\bullet) \longrightarrow H^{p+1}(A^\bullet) \longrightarrow \ldots$$

und verifizerten, dass es sich um einen Komplex handelt. Zeigen Sie nun, dass dieser Komplex exakt ist.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum. In der Vorlesung wurde benutzt, dass eine natürliche Homotopie

$$s_p : S_p(X) \longrightarrow S_{p+1}(X), \quad p \geq 0$$

zwischen der Identität $\mathrm{id} : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$ und der baryzentrischen Unterteilung $\beta : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$ wie im Beweis zur Homotopieinvarianz konstruiert werden kann. Führen Sie dazu die Details aus.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{C}P^\infty$ der topologische Raum aller Geraden

$$L \subset \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}.$$

Berechnen Sie mit dem Satz von Milnor die Kohomologiegruppen $H^p(\mathbb{C}P^\infty, R)$, $p \geq 0$.

Abgabe: Bis Montag, den 19.11.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $X = \bigcup_{i\geq 0} X_i$ eine Überdeckung mit offenen Teilmengen

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots .$$

Verifizieren Sie, dass die Homologiegruppe $H_p(X, R)$ die Vereinigung der Bilder von den kanonischen Abbildungen $H_p(X_i, R) \to H_p(X, R)$ ist.

Aufgabe 2. Überprüfen Sie, dass die in der Vorlesung diskutierte und auf der Rückseite abgebildete Fox–Artin-Kurve $Y \subset S^3$ tatsächlich homöomorph zum abgeschlossenen Einheitsintervall I ist.

Aufgabe 3. Beweisen Sie mithilfe der Gebietsinvarianz, dass $\mathbb{R}P^2$ kein Teilraum von $\mathbb{C}P^1$ sein kann.

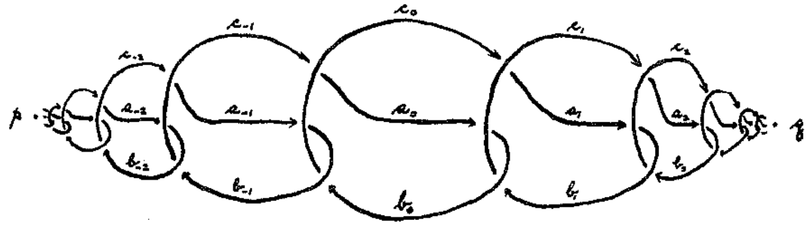
Aufgabe 4. Fassen Sie

$$Y = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leqslant 1, y = \sin(1/x) \;\text{ oder }\; x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\right\}$$

als abgeschlossene Teilmenge von $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ auf. Beweisen Sie analog zur Vorlesung, dass

$$H_p(S^2 \smallsetminus Y, R) = \begin{cases} R & \text{wenn } p = 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abgabe: Bis Montag, den 26.11.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.



p
c_{-2}
c_{-1}
c_0
c_1
c_2
a_{-2}
a_{-1}
a_0
a_1
a_2
b_{-2}
b_{-1}
b_0
b_1
b_2
q

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, dessen Homologiegruppen

$$H_p(X, \mathbb{Z}), \quad p \geq 0$$

endlich erzeugte Gruppen sind. Folgern Sie, dass dann auch die Kohomologiegruppen $H^p(X, R)$ für alle noetherschen Ringe R endlich erzeugte R-Moduln sind.

Aufgabe 2. Die ganzzahlige Homologie der reell-projektiven Räume $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$ ist durch

$$H_p(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } p = 0; \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } 0 < p < n \text{ ungerade}; \\ \mathbb{Z} & \text{falls } p = n \text{ ungerade}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben. Berechnen Sie daraus die Kohomologiegruppen $H^p(\mathbb{RP}^n, R)$ mit beliebigem Koeffizientenring R.

Aufgabe 3. Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die kanonische Abbildung

$$H^p(X, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_p(X, R), R)$$

nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Beweisen sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $H_n(X, \mathbb{Z}) = 0$ für alle $n \geq 1$.

(ii) Es gilt $H^n(X, R) = 0$ für alle $n \geq 1$ und alle Ringe R.

Verifizieren Sie weiterhin, dass dies äquivalent ist zu $H^n(X, \mathbb{F}_p) = 0$ für alle $p > 0$ prim, $n \geq 1$, falls die $H_n(X, \mathbb{Z})$ endlich erzeugte abelsche Gruppen sind.

Abgabe: Bis Montag, den 03.12.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei X der Quotientraum der geschlossenen 2-Mannigfaltigkeit T^2, der durch Identifizierung von zwei Punkten $a \neq b$ entsteht. Verifizieren Sie, dass X ein CW-Komplex ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Räume keine CW-Komplexe sein können:

(i) Der Quotientenraum X von D^1 modulo der Äquivalenzrelation, welche von $x \sim -x$ für $x \neq \pm 1$ erzeugt wird.

(ii) Der Unterraum $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ von der rellen Gerade $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass ein CW-Komplex X genau dann zusammenhängend ist, wenn das 1-Skelett X^1 zusammenhängend ist.

Aufgabe 4. Beschreiben Sie die CW-Komplexe X, für welche alle Anheftungsabbildungen $\varphi_\alpha : S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1}$ über das 0-Skelett X^0 faktorisieren, und berechnen Sie deren Homologie- und Kohomologiegruppen mithilfe von Mayer–Vietoris-Sequenzen.

Abgabe: Bis Montag, den 10.12.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 9

Aufgabe 1. Die sog. *Narrenkappe* X entsteht aus einem Dreieck, indem die Seiten gemäß des Flächenworts aaa^{-1} identifiziert werden (vgl. Blatt 2, Aufgabe 4). Fassen Sie dies als CW-Komplex

$$X = e^0 \cup e^1 \cup e^2$$

auf, und verifizieren Sie $H_p(X) = 0$ für alle $p > 0$.

Aufgabe 2. Sei X ein CW-Komplex mit f-Vektor von der Form

$$f = (f_0, 0, f_2, 0, f_4, 0, \ldots).$$

Berechnen Sie die Homologiegruppen $H_p(X, R)$ und Kohomologiegruppen $H^p(X, R)$ mit beliebigen Koeffizienten R.

Aufgabe 3. Sei X ein endlicher CW-Komplex. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q}) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(X, \mathbb{F}_p)$$

für alle Primzahlen $p > 0$.

Aufgabe 4. Sei X ein n-dimensionaler CW-Komplex und $c \in H_n(X)$. Beweisen Sie, dass durch Anheftung einer gewissen $(n+1)$-Zelle ein CW-Komplex $Y = X \cup e^{n+1}$ entsteht mit

$$H_p(Y) = \begin{cases} H_p(X) & \text{wenn } p \neq n; \\ H_n(X)/\mathbb{Z}c & \text{wenn } p = n. \end{cases}$$

Abgabe: Bis Montag, den 17.12.2012 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei X der topologische Raum, der sich aus einem regulären 9-Eck durch Identifizierung von Kanten gemäß des Wortes

$$aabaabaab$$

ergibt. Berechnen sie die Homologiegruppen $H_p(X)$, $p \geq 0$. Ist der Raum X eine 2-Mannigfaltigkeit?

Aufgabe 2. Seien a/b und a'/b zwei gekürzte Brüche, und

$$L = L_b(1, a) \quad \text{und} \quad L' = L_b(1, a')$$

die zugehörigen 3-dimensionalen Linsenräume. Verifizieren Sie, dass L und L' homöomorph sind falls $a' \equiv \pm a$ oder $a' \equiv a^{\pm 1}$ modulo b.

Aufgabe 3. Sei G eine abelsche Gruppe, $n \geq 1$ eine ganze Zahl, und $X = M(G, n)$ der entsprechende Moore-Raum. Berechnen Sie

$$H_p(X, R) \quad \text{und} \quad H^p(X, R)$$

bezüglich eines beliebigen Koeffizientenringes R.

Aufgabe 4. Sei $P = \prod_{i=1}^{\infty} C_{m_i}$ das Produkt von unendlich vielen endlichen zyklischen Gruppen C_{m_i}, und $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Beweisen Sie, dass es einen CW-Komplex X mit der Eigenschaft

$$H^n(X, \mathbb{Z}) = P$$

gibt.

Abgabe: Bis Montag, den 07.01.2013 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei X ein endlich-dimensionaler CW-Komplex. Beschreiben Sie die Einheiten im Kohomologiering $H^*(X, R)$.

Aufgabe 2. Sei $X = I$ das Einheitsintervall. Finden Sie singuläre Ketten $c' \in S^0(X, \mathbb{Z})$ und $c'' \in S^1(X, \mathbb{Z})$ so, dass

$$c' \cup c'' \neq \pm c'' \cup c'.$$

Aufgabe 3. Sei k ein perfekter Körper von Charakteristik $p = 2$. Beweisen Sie, dass jede nichtentartete symmetrische Bilinearform Φ auf einem endlichdimensionalem k-Vektorraum V isometrisch zu genau einer der Standardformen

$$U^{\oplus g} \quad \text{und} \quad I \oplus U^{\oplus d} \quad \text{und} \quad I^{\oplus 2} \oplus U^{\oplus d}$$

ist, wobei $I = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ und $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie explizit das Cup-Produkt auf $H^1(X, \mathbb{F}_2)$ bzw. $H^1(Y, \mathbb{Z})$ für die geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten

$$X = P^2 \# P^2 \quad \text{und} \quad Y = T^2 \# T^2.$$

Abgabe: Bis Montag, den 14.01.2013 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 12/13

Übungen zur Topologie I

Blatt 12

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass der Kohomologiering von $X = \mathbb{CP}^n$ kommutativ ist.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, $\sigma : \Delta^p \to X$ ein singulärer p-Simplex, und $c \in S^q(X, R)$ eine singuläre q-Kokette. Überprüfen Sie die Derivationseigenschaft

$$(-1)^q \delta(\sigma \cap c) = \delta(\sigma) \cap c \; - \; \sigma \cap \delta(c).$$

Aufgabe 3. Sei $X = \mathbb{RP}^n$ der reell-projektive Raum. Folgern Sie aus der Tatsache („Poincaré-Dualität"), dass der Homologiemodul $H_*(X, \mathbb{F}_2)$ frei vom Rang eins über dem Kohomologiering $H^*(X, \mathbb{F}_2)$ ist, dass es einen Isomorphismus

$$H^*(X, \mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{F}_2[T]/(T^{n+1})$$

von Ringen geben muss.

Aufgabe 4. Geben Sie einen zusammenhängenden topologischen Raum an, für den der Homologiemodul $H_*(X, \mathbb{F}_2)$ nicht frei vom Rang eins über dem Kohomologiering $H^*(X, \mathbb{F}_2)$ ist.

Abgabe: Bis Montag, den 21.01.2013 um 8:30 Uhr in den Zettelkästen. Dies ist das letzte Aufgabenblatt.