

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ ein graduerter Ring, der reduziert oder integer ist. Verifizieren Sie, daß das Schema $\text{Proj}(S)$ ebenfalls reduziert bzw. integer ist.

Aufgabe 2. Sei S ein graduerter Ring, $X = \text{Proj}(S)$ sein homogenes Spektrum, und $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Beweisen Sie, dass die quasikohärente Garbe $\mathcal{O}_X(n)$ auf der offenen Teilmenge

$$U = \bigcup_f D_+(f) \subset X$$

invertierbar ist, wobei die Vereinigung über die homogenen $f \in S$ verläuft, deren Grad $\deg(f)$ ein Teiler der Zahl n ist.

Aufgabe 3. Sei $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ ein graduerter Ring, $X = \text{Proj}(S)$ sein homogenes Spektrum, und $m, n \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen. Konstruieren Sie die kanonische Abbildung

$$\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \longrightarrow \mathcal{O}_X(m+n)$$

von quasikohärenten Garben.

Aufgabe 4. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, \mathcal{F} eine abelsche Garbe auf X , und \mathcal{G} eine abelsche Garben auf Y . Zeigen Sie, dass es eine Identifizierung

$$\text{Hom}(f^{-1}(\mathcal{G}), \mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*(\mathcal{F}))$$

gibt, indem Sie kanonische Abbildungen zwischen diesen Gruppen konstruieren, die zueinander invers sind.

Abgabe: Bis Montag, den 16.04.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Prüfungen: Es werden *mündliche Prüfungen* am Ende des Semesters stattfinden. *Zulassungsvoraussetzung* ist das Erreichen von 20% der Gesamtpunktzahl auf den zwölf Übungszettel, also $39 = \lceil 12 \cdot 16 \cdot 0,2 \rceil$ Punkte.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei X ein Schema. Verifizieren Sie, dass der kontravariante Funktor

$$F : (\text{Ring}) \longrightarrow (\text{Set}), \quad R \longmapsto \text{Hom}(X, \text{Spec}(R))$$

darstellbar ist, und geben Sie das darstellende Objekt an.

Aufgabe 2. Sei R ein Grundring, X ein Schema, \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf X , und

$$s = (s_0, \dots, s_n) : \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}$$

eine Surjektion. Zeigen Sie, dass der resultierende Morphismus $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ injektiv ist, falls es zu je zwei Punkten $x \neq y$ aus X es eine Linearkombination $\sigma = \sum \lambda_i s_i$, $\lambda_i \in R$ mit

$$\sigma(x) = 0, \sigma(y) \neq 0 \quad \text{oder} \quad \sigma(x) \neq 0, \sigma(y) = 0$$

gibt.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper und $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir bilden die invertierbare Garbe $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)$. Betrachte die Basis

$$\sigma_{ij} = T_i T_j \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}), \quad 0 \leq i \leq j \leq n$$

und den zugehörigen Morphismus

$$f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^m,$$

wobei $m = \binom{n+2}{n} - 1$. Beschreibe die auf der Menge der k -wertigen Punkte induzierte Abbildung $\mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^m(k)$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie das *Yoneda-Lemma*: Ist \mathcal{C} eine beliebige Kategorie, und ist $\hat{\mathcal{C}}$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow (\text{Set})$, so ist der Funktor

$$\mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}, \quad X \longmapsto h_X$$

volltreu.

Abgabe: Bis Montag, den 23.04.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper. Rechnen Sie nach, dass es eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mu_{n+1}(k) \longrightarrow \mathrm{SL}_{n+1}(k) \longrightarrow \mathrm{PGL}_{n+1}(k)$$

gibt, und verifizieren Sie, dass die induzierte Wirkung von $\mathrm{SL}_{n+1}(k)$ auf dem Schema \mathbb{P}^n eine kanonische Wirkung auf $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1))$ liefert.

Aufgabe 2. Sei k ein Grundkörper und

$$G = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = \mathrm{PGL}_{n+1}(k).$$

Zeigen Sie, dass die Isotropiegruppe $G_x \subset G$ zu jedem k -wertigen Punkt $x \in \mathbb{P}^n$ isomorph zum semidirekten Produkt $k^n \rtimes \mathrm{GL}_n(k)$ ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Grundring und $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathrm{Spec}(R)$ der Strukturmorphismus. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$f^* : \mathrm{Pic}(R) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_R^n), \quad L \longmapsto f^*(\tilde{L})$$

injektiv ist, und ihr Bild ein direkter Summand ist. Folgern Sie, dass im Allgemeinen $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \neq \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 4. Sei R ein Grundring, A eine R -Algebra, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, und $\bar{A} = A/\mathfrak{a}$ der Restklassenring. Angenommen, der Ring A ist lokal. Zeigen Sie, dass sich jeder Morphismus $\mathrm{Spec}(\bar{A}) \rightarrow \mathbb{P}^n$ zu einem $\mathrm{Spec}(A) \rightarrow \mathbb{P}^n$ fortsetzen lässt. Mit anderen Worten: die kanonische Abbildung

$$\mathbb{P}^n(A) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\bar{A})$$

ist surjektiv.

Abgabe: Bis Montag, den 30.04.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf einem noetherschen Schema X . Verifizieren Sie, dass \mathcal{F} global erzeugt ist genau dann, wenn es eine Surjektion

$$\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F}$$

für ein gewisses $r \geq 0$ gibt.

Aufgabe 2. Sei k ein Grundkörper und $D \subset \mathbb{P}^n$ ein effektiver Cartier-Divisor. Angenommen, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass D zusammenhängend sein muss, indem Sie $H^0(D, \mathcal{O}_D)$ mittels einer langen exakten Sequenz berechnen.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher Grundring und $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b) \longrightarrow 0$$

spaltet, indem sie gewisse lange exakte Kohomologiesequenz betrachten. Gilt die Aussage auch für $n = 0$ oder $n = 1$?

Aufgabe 4. Sei R ein noetherscher Grundring. Beweisen Sie, dass jede quasikohärente Garbe \mathcal{F} auf \mathbb{P}^n die Vereinigung ihrer kohärenten Untergarben $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$, $\alpha \in I$ ist.

Abgabe: Bis Montag, den 07.05.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 5

Aufgabe 1. Konstruieren Sie eine kohärente Garbe \mathcal{F} auf \mathbb{P}^n , deren Hilbert-Polynom

$$P_{\mathcal{F}}(t) = c_m \binom{m+t}{m} + \dots + c_0 \binom{0+t}{0}$$

einen Koeffizienten $c_i < 0$ hat.

Aufgabe 2. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von kohärenten Garben auf \mathbb{P}^n . Drücken Sie $\deg(\mathcal{F})$ durch $\deg(\mathcal{F}')$ und $\deg(\mathcal{F}'')$ aus.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher Grundring, und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf \mathbb{P}^n . Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$$

für einen endlich erzeugten graduierten Modul M über $S = R[T_0, \dots, T_n]$.

Aufgabe 4. Sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf $X = \mathbb{P}^n$. Beweisen Sie, dass die Menge der *assozierten Punkte*

$$\text{Ass}(\mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid \text{es gibt eine } \mathcal{O}_{X,x}\text{-lineare Inklusion } \kappa(x) \subset \mathcal{F}_x\}$$

endlich ist.

Abgabe: Bis Montag, den 14.05.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 6

Aufgabe 1. Geben Sie Beispiele für Morphismus von Schemata $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, welche quasikompakt aber nicht lokal vom endlichen Typ sind, sowie welche die lokal vom endlichen Typ aber nicht quasikompakt sind.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, Y eine abgeschlossene Teilmenge, und $\iota : Y \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Rekapitulieren Sie, dass

$$H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, \iota_*(\mathcal{F}))$$

für jedes $i \geq 0$ und jede abelsche Garbe \mathcal{F} auf Y gilt.

Aufgabe 3. Sei X ein projektives R -Schema, $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample Garbe, $Y \subset X$ eine abgeschlossenen Teilmenge, und $x_1, \dots, x_r \in X \setminus Y$ endlich viele Punkte. Zeigen Sie, dass es ein $d \geq 0$ und ein $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$ mit

$$x_1, \dots, x_r \in X_f \quad \text{und} \quad Y \subset X \setminus X_f$$

gibt. Veranschaulichen Sie diese Tatsache mit einer Zeichnung.

Aufgabe 4. Sei R ein noetherscher Ring und X ein projektives R -Schema. Beweisen Sie, dass es eine endlich erzeugte \mathbb{Z} -Unteralgebra $R' \subset R$ und ein projektives R' -Schema X' gibt mit

$$X \simeq X' \otimes_{R'} R.$$

Abgabe: Bis Montag, den 21.05.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 7

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass die Klasse der endlichen Morphismen alle abgeschlossenen Einbettungen enthält und stabil unter Verkettung und Basiswechsel ist.

(ii) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Morphismen. Angenommen, g ist separiert und $g \circ f$ ist endlich. Folgern Sie, dass dann auch f endlich sein muss.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Grundring, X ein eigentliches Schema, $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ eine ample Garbe. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ die offene Teilmenge

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

affin ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper und X ein integres projektives k -Schema mit $\text{Pic}(X) = 0$. Deduzieren Sie, dass $X = \text{Spec}(E)$ für eine endliche Körpererweiterung $k \subset E$.

Aufgabe 4. Sei $\varphi : R \rightarrow A$ ein Homomorphismus von Ringen. Angenommen, der entsprechende Morphismus von Schemata $f : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(R)$ ist lokal vom endlichen Typ. Beweisen Sie, dass die R -Algebra A endlich erzeugt ist.

Abgabe: Bis Montag, den 04.06.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper, und X ein integres eigentliches k -Schema. Verifizieren Sie, dass die k -Algebra $E = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ eine endliche Körpererweiterung von k ist.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Grundring, und X, Y zwei R -Schemata vom endlichen Typ, und \mathcal{L}, \mathcal{N} ample invertierbare Garben auf X bzw. Y . Verifizieren Sie mit der Definition von Ampleheit, dass

$$\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{L}) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\mathcal{N}) \in \mathrm{Pic}(X \times Y)$$

ebenfalls ample ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper, X ein eigentliches k -Schema, $k \subset k'$ eine Körpererweiterung, und $X' = X \otimes_k k'$ der Basiswechsel. Beweisen Sie:

$$\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X) \text{ ample} \iff \mathcal{L}' \in \mathrm{Pic}(X') \text{ ample.}$$

Hierbei schreiben wir $\mathcal{F}' = \mathrm{pr}_1^*(\mathcal{F})$ für die induzierten Garben auf X' .

Aufgabe 4. Sei X ein noethersches Schema, das eine ample invertierbare Garbe besitzt. Zeigen Sie, dass dann jede invertierbare Garbe $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}(X)$ von der Form

$$\mathcal{N} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes -1}$$

für ample Garben $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathrm{Pic}(X)$ ist. Folglich wird die Picard-Gruppe von den amplen Garben erzeugt.

Abgabe: Bis Montag, den 11.06.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 9

Aufgabe 1. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass ein topologischer Raum X genau dann quasikompakt ist, wenn für jeden topologischen Raum T die Projektion $\text{pr}_2 : X \times T \rightarrow T$ abgeschlossen ist. Wieso lässt sich daraus nicht schließen, dass für ein quasikompaktes k -Schema S der Strukturmorphismus $S \rightarrow \text{Spec}(k)$ universell abgeschlossen ist?

Aufgabe 2. Sei C eine irreduzible eigentliche algebraische Kurve. Verifizieren Sie, dass jede offene Teilmenge $U \subsetneq C$ affin ist.

Aufgabe 3. Sei $R \rightarrow A$ ein endlicher Ringhomomorphismus. Argumentieren Sie mit dem Bewertungskriterium, dass $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(R)$ universell abgeschlossen und somit eigentlich ist.

Aufgabe 4. Sei R ein noetherscher Grundring, X ein eigentliches R -Schema, und \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf X . Beweisen Sie, dass \mathcal{L} ampel ist genau dann, wenn für jede kohärente Garbe \mathcal{F} auf X die getwistete Garbe $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes t}$ für $t \gg 0$ global erzeugt ist.

Abgabe: Bis Montag, den 18.06.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei X ein eigentliches k -Schema, \mathcal{L} eine invertierbare Garbe, und $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ ein Linearsystem. Der Basisort $B = \text{Bs}(V)$ ist als Teilmenge definiert durch

$$B = \{x \in X \mid s(x) = 0 \text{ für alle } s \in V\}.$$

Versehen Sie $B \subset X$ in kanonischer Weise mit der Struktur eines abgeschlossenen Unterschemas.

Aufgabe 2. Sei C eine eigentliche reguläre Kurve über einem Grundkörper $k = \bar{k}$, und $x_1, \dots, x_r \in C$ endlich viele abgeschlossene Punkte. Zeigen Sie, dass es eine ample Garbe \mathcal{L} und ein Basispunkt-freies Linearsystem $V \subset H^0(C, \mathcal{L})$ gibt so, dass der induzierte Morphismus $f : C \rightarrow \mathbb{P}(V)$ die Eigenschaft

$$f(x_1) = \dots = f(x_r)$$

hat, und auf dem Komplement $C \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ eine Einbettung ist.

Aufgabe 3. Sei C eine reguläre eigentliche Kurve über einem Grundkörper k vom Geschlecht $g > 0$, und $x \in C$ ein k -wertiger Punkt. Argumentieren Sie, dass die invertierbare Garbe $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(x)$ nicht global erzeugt sein kann.

Aufgabe 4. Sei X ein eigentliches k -Schema, und \mathcal{L}, \mathcal{N} zwei invertierbare Garben auf X . Angenommen, \mathcal{N} ist semiampel und \mathcal{L} ist ampel. Beweisen Sie, dass dann auch $\mathcal{L} \otimes \mathcal{N}$ ampel ist.

Abgabe: Bis Montag, den 25.06.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 11

Aufgabe 1. Seien $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{P}^n$ endliche viele Punkte, und $T = \{x_1, \dots, x_r\}$ das zugehörige reduzierte abgeschlossene Unterschema. Berechnen Sie die Dimension des Vektorraumes

$$\text{Ext}^n(\mathcal{O}_T, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)).$$

Ändert sich die Dimension, wenn $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ durch $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ ersetzt wird?

Aufgabe 2. Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein kovarianter δ -Funktorkomplex zwischen abelschen Kategorien. Beweisen Sie Grothendiecks Kriterium: Wenn es zu jedem $M \in \text{ob}(\mathcal{A})$ und $i > 0$ eine Injektion $u : M \rightarrow I$ gibt mit $F^i(u) = 0$, so ist F ein universeller δ -Funktorkomplex.

Aufgabe 3. Sei X ein geringter Raum, und \mathcal{E} ein lokal freier \mathcal{O}_X -Modul vom endlichen Rang. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{Ext}^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{G})$$

für alle \mathcal{O}_X -Moduln \mathcal{F}, \mathcal{G} und $i \geq 0$.

Aufgabe 4. Sei \mathcal{F}, \mathcal{G} zwei \mathcal{O}_X -Moduln auf einem geringten Raum X , und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Verifizieren Sie für die Ext-Garben, dass

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_U}^i(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

für alle $i \geq 0$.

Abgabe: Bis Montag, den 02.07.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ eine Hyperfläche vom Grad $d \geq 1$. Für welche d ist die dualisierende Garbe ω_X ampel, wann ist $\omega_X^{\otimes -1}$ ampel, und unter welchem Umstand gilt $\omega_X = \mathcal{O}_X$?

Aufgabe 2. Sei R eine endliche k -Algebra. Geben Sie einen R -Modul N und eine k -lineare Abbildung $\tau : N \rightarrow k$ an, für den

$$(\omega_X, \text{Tr}) = (\tilde{N}, \tilde{\tau})$$

eine dualisierende Garbe auf dem projektiven k -Schema $X = \text{Spec}(R)$ ist. (Erkennen Sie dabei, wie es bei der Serre-Dualität zur Bezeichnung „Spurabbildung“ kam?)

Aufgabe 3. Sei Y ein eigentliches k -Schema, dass equidimensional und Cohen–Macaulay ist, und $X \subset Y$ eine irreduzible Komponente. Beschreiben Sie die dualisierende Garbe ω_X durch die dualisierende Garbe ω_Y .

Aufgabe 4. Sei $f_1, \dots, f_{n-1} \in \mathbb{C}[T_0, \dots, T_n]$ eine reguläre Sequenz von homogene Polynome vom Grad $d_1, \dots, d_r \geq 1$ so, dass das Verschwindungsschema

$$X = V_+(f_1, \dots, f_{n-1}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$$

regulär ist. Wie viele Henkel hat die zugehörige topologische 2-Mannigfaltigkeit $X(\mathbb{C})$?

Abgabe: Bis Montag, den 09.07.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.