Mathematisches Institut SS 12
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper, und X ein integres eigentliches k-Schema. Verifizieren Sie, dass die k-Algebra $E = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ eine endliche Köerpererweiterung von k ist.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Grundring, und X, Y zwei R-Schemata vom endlichen Typ, und $\mathcal{L}, \mathcal{N}$ ample invertierbare Garben auf X bzw. Y. Verifizieren Sie mit der Definition von Ampelheit, dass

$$\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{L}) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\mathcal{N}) \in \mathrm{Pic}(X \times Y)$$

ebenfalls ampel ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper, X ein eigentliches k-Schema, $k \subset k'$ eine Köpererweiterung, und $X' = X \otimes_k k'$ der Basiswechsel. Beweisen Sie:

$$\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X) \text{ ampel} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}' \in \mathrm{Pic}(X') \text{ ampel}.$$

Hierbei schreiben wir $\mathcal{F}' = \mathrm{pr}_1^*(\mathcal{F})$ für die induzierten Garben auf X'.

Aufgabe 4. Sei X ein noethersches Schema, das eine ample invertierbare Garbe besitzt. Zeigen Sie, dass dann jede invertierbare Garbe $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}(X)$ von der Form

$$\mathcal{N} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes -1}$$

für ample Garben $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathrm{Pic}(X)$ ist. Folglich wird die Picard-Gruppe von den amplen Garben erzeugt.

Abgabe: Bis Montag, den 11.06.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.