Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Verifiziern Sie, dass der geringte Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein Schema ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{F}$ eine mengenwertige Garbe auf einem topologischen Raum X, und

$$s, t \in \Gamma(U, \mathcal{F})$$

zwei lokale Schnitte. Angenommen, es gilt $s_x = t_x$ im Halm $\mathcal{F}_x$ für alle Punkte $x \in U$. Folgern Sie, dass dann $s = t$.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper. Bestimmen Sie die Mengen

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{A}^1_k, \mathbb{A}^n_k) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1_k, \mathbb{A}^n_k)$$

aller k-Morphismen des affinen 1-Raumes bzw. des projektiven 1-Raumes in den affinen n-Raum.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper, und $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$, $i = 1, 2$ zwei Kopien des affinen 1-Raumes $\mathbb{A}^1_k$. Sei $U_i \subset X_i$ das Komplement des Nullpunkts $0 \in \mathbb{A}^1_k$. Die *affine Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt* ist die Verklebung

$$(X, \mathcal{O}_X) = (X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \cup (X_2, \mathcal{O}_{X_2})$$

bezüglich der Identität $(U_1, \mathcal{O}_{U_1}) \to (U_2, \mathcal{O}_{U_2})$. Skizzieren Sie den zugrundeliegenden Raum und weisen Sie nach, dass das Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ nicht affin ist.

Abgabe: Bis Montag, den 24.10.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Zeigen Sie, dass die Teilmengen $U \subset X$, die zugleich offen und abgeschlossen sind, den idempotenten globalen Schnitte $e \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ entsprechen, also den Elementen mit der Eigenschaft $e^2 = e$.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und G eine abstrakte Gruppe. Wir definieren eine abelschen Prägarbe $\mathcal{P}$ vermöge

$$\Gamma(V, \mathcal{P}) = G, \qquad V \subset X \text{ offen},$$

wobei alle Restriktionen die Identitätsabbildung sind. Beschreiben Sie die Garbifizierung $G_X = \mathcal{P}^+$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, M ein R-Modul, $f \in R$ ein Ringelement, und $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$ das davon erzeugte multiplikative System. Wir definieren ein System M_n von R-Moduln, indiziert durch $n \in \mathbb{Z}$, vermöge

$$M_n = M, \qquad M_n \longrightarrow M_m, \quad a \longmapsto f^{m-n}a, \quad \text{für } n \leqslant m.$$

Konstruieren Sie eine kanonische Abbildung

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{Z}} M_n \longrightarrow S^{-1}M$$

und zeigen Sie, dass diese bijektiv ist.

Aufgabe 4. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln. Wir definieren das Tensorproduct $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ als die Garbifizierung der Prägarbe

$$V \longmapsto \Gamma(V, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(V,\mathcal{O}_X)} \Gamma(V, \mathcal{F}).$$

Konstruieren Sie kanonische Abbildungen

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x, \quad x \in X$$

und weisen Sie nach, dass diese bijektiv sind.

Abgabe: Bis Montag, den 31.10.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Literaturempfehlungen:

Robin Hartshorne: Algebraic Geometry. Springer, Berlin, 1977. Das unübertroffenen Standardlehrbuch. Geschrieben, um Schemata einem breiten Kreis zugänglich zu machen. Wenn Sie sich ein Buch zur Vorlesung anschaffen wollen, so sollten sie dieses wählen.

David Mumford: The red book of varieties and schemes. Springer, Berlin, 1988. Sehr prägnante Darstellung, insbesondere der Eigentümlichkeiten von Schemata.

Quing Liu: Algebraic geometry and arithmetic curves. Oxford University Press, Oxford, 2002. Originelle Herangehensweise jüngeren Datums, ohne historischen Ballast, mit Betonung der Schemata über $\mathbb{Z}$.

Igor Shafarevich: Basic Algebraic Geometry. Springer, Berlin, 1977. Ein klassischer Text, in dem auch auf historische Bezüge und Verbindungen zur komplexen Analysis eingegangen wird.

Alexander Grothendieck, Jean Dieudonné: Eléments de Géométrie Algébrique I. Springer, Berlin, 1971. Dies ist der als Buch erschienene erste Band der EGA's, die als Artikel in der Zeitschrift Publ. Math., Inst. Haute Étud. Sci. in den Nummern 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 erschienen sind. Es handelt es sich um ein umfassendes Werk, in dem die Theorie der Schemata akribisch entwickelt wird. Schwere französische Kost, auf lange Sicht aber sehr lohnend.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei X ein Schema, $a \in X$ ein Punkt, und E eine Vektorraum über dem Restekörper $\kappa(a)$. Wir definieren eine abelsche Prägarbe $\mathcal{E}$ durch

$$\Gamma(V, \mathcal{E}) = \begin{cases} E & \text{wenn } a \in V; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Prägarbe dem Garbenaxiom genügt, eine kanonische $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur trägt, und quasikohärent ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass Produkte von quasikohärenten Garben im Allgemeinen nicht mehr quasikohärent sind.

Aufgabe 3. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, und $Y' \subset Y$ das abgeschlossenes Unterschema zu einem quasikohärenten Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$. Zeigen Sie, dass f genau dann über Y' faktorisiert, wenn die kanonische Verkettung

$$\mathcal{I}_{f(x)} \subset \mathcal{O}_{Y,f(x)} \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{O}_{X,x}$$

für alle $x \in X$ die Nullabbildung ist.

Aufgabe 4. Sei X ein Schema und $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ zwei quasikohärente Ideale. Finden Sie die richtige Definition für die Untergarben

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X \quad \text{und} \quad \mathcal{I} + \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X,$$

und zeigen Sie, dass diese Garben quasikohärent sind.

Abgabe: Bis Montag, den 07.11.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Prüfungen: Wie üblich werden *mündliche Prüfungen* am Ende der Vorlesungszeit sowie am Ende des Semesters durchgeführt. *Zulassungsvoraussetzung* ist das Erreichen von 20% der Gesamtpunktzahl auf den dreizehn Übungszettel, also $42 = \lceil 13 \cdot 16 \cdot 0,2 \rceil$ Punkte.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Bestimmen Sie die Fasern $f^{-1}(x)$, $x \in \operatorname{Spec}(R)$ zum kanonischen Morphismus

$$f : \mathbb{P}^1_R \longrightarrow \operatorname{Spec}(R),$$

der durch die Inklusionen $R \subset R[T^{\pm 1}]$ gegeben ist.

Aufgabe 2. Seien X, Y zwei R-Schemata, und A eine Algebra über dem Ring R. Verifizieren Sie, dass der kanonische Morphismus

$$X \times_{\operatorname{Spec}(A)} Y \longrightarrow X \times_{\operatorname{Spec}(R)} Y$$

eine abgeschlossene Einbettung ist.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $K \subset E$ eine endliche Galois-Erweiterung, mit Galois-Gruppe $G = \operatorname{Gal}(E/K)$. Beweisen Sie, dass das Faserprodukt

$$X = \operatorname{Spec}(E) \times_{\operatorname{Spec}(K)} \operatorname{Spec}(E)$$

aus genau $n = [E : K] = \operatorname{ord}(G)$ Punkten besteht, deren Restekörper isomorph zu E ist.

Aufgabe 4. Sei $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \cup \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ die affine Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt. Zeigen Sie, dass X nicht separiert ist, also dass die Einbettung

$$\Delta_X : X \longrightarrow X \times X$$

keine abgeschlossene Einbettung ist.

Abgabe: Bis Montag, den 14.11.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 5

Aufgabe 1. Seien $m, n \neq 0$ ganze Zahlen. Berechnen Sie

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 2. Seien I_α und P_α eine Familie von injektiven bzw. projektiven Objekten in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Angenommen, das Produkt und die Summe

$$\prod_\alpha I_\alpha \quad \text{und} \quad \bigoplus_\alpha P_\alpha$$

existiert in der Kategorie $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass diese Objekte wieder injektiv bzw. projektiv sind.

Aufgabe 3. Beweisen Sie detailliert das Schlangenlemma: Ist

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen mit exakten Zeilen, so ist die Sequenz

$$\mathrm{Ker}(f') \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(f') \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f'')$$

exakt.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Angenommen, zu jeder Familie I_n von injektiven R-Moduln ist auch die Summe $\bigoplus_n I_n$ ein injektiver R-Modul. Folgern Sie daraus, dass R noethersch sein muss. Tip: Betten Sie zu einer aufsteigenden Folge von Idealen $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \ldots$ die Restklassenmodule $R/\mathfrak{a}_n$ in injektiven Module I_n ein.

Abgabe: Bis Montag, den 21.11.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $X = \operatorname{Spec}(R)$ das Spektrum eines integren Rings, und G eine abstrakte Gruppe. Verifizieren Sie, dass die Garbe G_X der lokal konstanten Abbildungen $U \to G$ azyklisch ist.

Aufgabe 2. Sei X ein geringter Raum, und $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Für welche von den drei Zerlegungen

$$\{1, 2, 3\} = \{i, j\} \cup \{k\}$$

gilt die Implikation:

$$\mathcal{F}_i \text{ und } \mathcal{F}_j \text{ azyklisch} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_k \text{ azyklisch}$$

Aufgabe 3. Sei k ein Körper, und $X \subset \mathbb{P}^1_k$ ein abgeschlossenes Unterschema, dessen zugrundeliegender Raum aus zwei abgeschlossenen Punkten $a, b \in \mathbb{P}^1_k$ besteht. Zeigen Sie, dass für das zugehörige quasikohärente Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$ gilt:

$$H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{I}) \neq 0.$$

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, und $\mathcal{F}$ ein abelsche Garbe auf Y. Beweisen sie mittels welker Auflösungen, dass

$$H^n(Y, \mathcal{F}) = H^n(X, i_*(\mathcal{F})), \quad n \geq 0$$

gilt, wobei $i : Y \to X$ die Inklusionsabbildung ist.

Abgabe: Bis Montag, den 28.11.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei X ein noethersches Schema. Verifizieren Sie, dass jedes Unterschema von X ebenfalls noethersch ist.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper und X, Y zwei noethersche k-Schemata. Muss dann auch das Faserprodukt $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y$ noethersch sein?

Aufgabe 3. Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass es abelsche Garben $\mathcal{F}$ auf $X = \mathbb{A}^1_k$ mit

$$H^1(X, \mathcal{F}) \neq 0$$

geben muss.

Aufgabe 4. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Angenommen, X ist noethersch, und für jede affine offene Teilmenge $V \subset Y$ ist das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ wieder affin. Beweisen Sie, dass für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

von quasikohärenten Garben auf X die Sequenz der Bildgarben

$$0 \longrightarrow f_*(\mathcal{F}') \longrightarrow f_*(\mathcal{F}) \longrightarrow f_*(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt ist. Gilt diese Aussage auch ohne die Voraussetzung an die $f^{-1}(V)$?

Abgabe: Bis Montag, den 05.12.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei X ein noethersches, separiertes Schema. Verifizieren Sie mittels Čech-Kohomologie, dass es ein $r_0 \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft:

$$H^r(X, \mathcal{F}) = 0$$

für alle $r \geq r_0$ und $\mathcal{F}$ quasikohärent.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung, deren Indexmenge I mit einer Totalordnung versehen ist, und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe. Rechnen Sie nach, dass die durch

$$(s_{\alpha_0,\ldots,\alpha_r})_{\alpha_0<\ldots<\alpha_r} \longmapsto \Big(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i s_{\alpha_0,\ldots,\widehat{\alpha_i},\ldots,\alpha_{r+1}}|_{U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{r+1}}}\Big)_{\alpha_0<\ldots<\alpha_{r+1}}$$

gegebene Abbildungen

$$d_r : C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \quad r \geq 0$$

die Eigenschaft $d_{r+1} \circ d_r = 0$ haben.

Aufgabe 3. Sei $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \cup \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ die affine Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt. Berechnen Sie die Čech-Kohomologiegruppen

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \quad \text{und} \quad \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^\times),$$

wobei $\mathfrak{U} = (U, V)$ die affine offene Überdeckung ist, welche durch die beiden Kopien der affinen Gerade gegeben sind.

Aufgabe 4. Sei X ein geringter Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Sei

$$t \in H^0(X, \mathcal{F}'')$$

ein globaler Schnitt, der sich auf einer offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ zu lokalen Schnitten $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$ liften lässt. Rechnen Sie nach, dass die Differenzen

$$r_{\alpha\beta} = s_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} - s_\beta|_{U\alpha\beta} \in \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{F}') \subset \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{F}),$$

aufgefasst als Element in $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}')$, im Kern des Differentials $d_1 : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \to C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}')$ liegt, also ein 1-Kozykel des Čech-Komplex ist.

Abgabe: Bis Montag, den 12.12.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper, $\mathcal{E}$ eine lokal freie Garbe vom Rang $r \geq 0$ auf $\mathbb{P}^1$, und $\det(\mathcal{E}) = \Lambda^r(\mathcal{E})$ die zugehörige invertierbare Garbe. Verifizieren Sie die Formel

$$\chi(\mathcal{E}) = \deg(\det(\mathcal{E})) + \operatorname{rank}(\mathcal{E})\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}).$$

Aufgabe 2. Seien $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{P}^1$ abgeschlossene Punkte. Wir betrachten eine natürliche Zahl n mit

$$n \geq \sum_{i=1}^{r} [\kappa(a_i) : k].$$

Zeigen Sie, dass es einen globalen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, $s \neq 0$ gibt mit der Eigenschaft $s(a_i) = 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant r$.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{E}$ eine lokal freie Garbe vom endlichen Rang auf $\mathbb{P}^1$. Zeigen Sie, dass es eine Surjektion

$$\bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \longrightarrow \mathcal{E}$$

geben muss, sobald n, s hinreichend groß sind. Unter welchen Umständen ist $s = \operatorname{rank}(\mathcal{E})$ möglich?

Aufgabe 4. Sei d eine ganze Zahl, und $\mathcal{E}$ die lokal freie Garbe vom Rang $r = 2$ auf $\mathbb{P}^1$, welche durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} T^{-2} & T^d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k[T^{\pm 1}])$$

gegeben wird. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ in einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$$

liegt, und bestimmen Sie den Spaltungstyp (n_1, n_2) von $\mathcal{E}$ in Abhängigkeit von der Zahl $d \in \mathbb{Z}$.

Abgabe: Bis Montag, den 17.12.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ ein affiner Morphismus und $\mathcal{F}$ eine quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Verifizieren Sie, dass der $\mathcal{O}_Y$-Modul $f_*(\mathcal{F})$ ebenfalls quasikohärent ist.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Z & \longleftarrow & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X' & \longrightarrow & Z' & \longleftarrow & Y' \end{array}$$

von Schemata. Angenommen, die drei vertikalen Morphismen f, g, h sind affin. Zeigen Sie, dass dann auch der induzierte Morphismus

$$f \times g : X \times_Z Y \longrightarrow X' \times_{Z'} Y'$$

affin ist.

Aufgabe 3. Sei X ein noethersches, separiertes Schema und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X. Beweisen Sie, dass es eine Injektion $\mathcal{F} \to \mathcal{A}$ in eine welke quasikohärente Garbe $\mathcal{A}$ gibt.

Aufgabe 4. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Morphismen von Schemata. Angenommen, das Schema Y ist separiert und der Morphismus $g \circ f$ ist affin. Beweisen Sie, dass dann auch f affin sein muss.

Tip: Verifizieren Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & X \times_Z Y \arrow[r, "gf \times \mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_Y"] & Z \times_Z Y = Y \\
Y \arrow[r, "\Delta_Y"'] & Y \times_Z Y, &
\end{tikzcd}$$

kommutative mit cartesischem Quadrat ist, und rekonstruieren Sie damit den Morphismus f aus Δ_Z und $g \circ f$ durch Basiswechsel, Produktbildung und Verkettung.

Abgabe: Bis Montag, den 09.01.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und Guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei C eine Kurve und $C' \subset C$ ein Unterschema, dass zugleich offen und abgeschlossen ist. Verifizieren Sie, dass C' auch eine Kurve sein muss.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass es zu dem Paar $a \geq 1, g \geq 0$ eine Kurve C mit den numerischen Invarianten

$$h^0(\mathcal{O}_C) = a \quad \text{und} \quad h^1(\mathcal{O}_C) = g$$

gibt.

Aufgabe 3. Sei $f : X \to Y$ ein endlicher, lokal freier Morphismus von Schemata. Beweisen Sie, dass für jeden lokal freien $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{E}$ vom endlichen Rang das direkte Bild $f_*(\mathcal{E})$ auch lokal frei vom endlichen Rang ist, und zwar sowohl als Modul über $f_*(\mathcal{O}_X)$, als auch als Modul über $\mathcal{O}_Y$.

Aufgabe 4. Sei $f : X \to Y$ ein affiner Morphismus von Schemata. Beweisen Sie, dass der Funktor

$$\mathcal{F} \longmapsto f_*(\mathcal{F})$$

eine Äquivalenz zwischen der Kategorie $\mathrm{QCoh}(X)$ der quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln und der Kategorie der $f_*(\mathcal{O}_X)$-Moduln, welche quasikohärent als $\mathcal{O}_Y$-Moduln sind, liefert.

Abgabe: Bis Montag, den 16.01.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum. Verifizieren Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(i) X ist irreduzibel

(ii) Jede nichtleere offenen Teilmenge $U \subset X$ ist dicht.

(iii) Ist $X = A \cup B$ eine Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen, so ist $X = A$ oder $X = B$.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie mit dem Zornschen Lemma, dass jede irreduzible Teilmenge $A \subset X$ in einer irreduziblen Komponente von X enthalten ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{E}$ eine lokal freier Garbe auf einer Kurve C. Zeigen Sie, dass es invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ und $\mathcal{N}$ gibt mit

$$H^1(C, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0 \quad \text{und} \quad H^0(C, \mathcal{E} \otimes \mathcal{N}) = 0.$$

Aufgabe 4. Sein X ein Schema. Beweisen Sie, dass die Punkte $x \in X$ den irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X$ bijektiv entsprechen, vermöge der Zuordnung

$$A = \overline{\{x\}}.$$

Abgabe: Bis Montag, den 23.01.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 13

Aufgabe 1. Sei C eine reguläre Kurve, $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe, und $x \in C$ ein abgeschlossener Punkt. Beweisen Sie, dass $x \in \mathrm{Bs}(\mathcal{L})$ gilt genau dann, wenn die kanonische Inklusion

$$H^0(C, \mathcal{L}(-x)) \subset H^0(C, \mathcal{L})$$

eine Gleichheit ist.

Aufgabe 2. Sei C eine reguläre Kurve mit $h^0(\mathcal{O}_D) = 1$, und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe, und $D \subset C$ ein effektiver Cartier-Divisor mit $h^0(\mathcal{O}_D) = 2$. Zeigen Sie, dass die Restriktionsabbildung

$$H^0(C, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(D, \mathcal{L}_D)$$

surjektiv ist, falls $\deg(\mathcal{L}) \geq 2g + 1$.

Aufgabe 3. Sei C eine reduzible Kurve. Zeigen Sie, dass es invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ mit Grad $\deg(\mathcal{L}) > 0$ gibt so, dass der Basisort

$$\mathrm{Bs}(\mathcal{L}) = \left\{x \in C \mid s(x) = 0 \text{ für alle } s \in H^0(C, \mathcal{L})\right\}$$

nichtleer ist für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf einem noetherschen Schema X. Zeigen Sie, dass es ein $n \geq 0$ gibt so, dass

$$\mathrm{Bs}(\mathcal{L}^{\otimes n}) = \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{Bs}(\mathcal{L}^{\otimes t})$$

für die Basisorte gilt.

Abgabe: Bis Montag, den 30.01.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.