Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper, $\mathcal{E}$ eine lokal freie Garbe vom Rang $r \geq 0$ auf $\mathbb{P}^1$, und $\det(\mathcal{E}) = \Lambda^r(\mathcal{E})$ die zugehörige invertierbare Garbe. Verifizieren Sie die Formel

$$\chi(\mathcal{E}) = \deg(\det(\mathcal{E})) + \operatorname{rank}(\mathcal{E})\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}).$$

Aufgabe 2. Seien $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{P}^1$ abgeschlossene Punkte. Wir betrachten eine natürliche Zahl n mit

$$n \geq \sum_{i=1}^{r} [\kappa(a_i) : k].$$

Zeigen Sie, dass es einen globalen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, $s \neq 0$ gibt mit der Eigenschaft $s(a_i) = 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant r$.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{E}$ eine lokal freie Garbe vom endlichen Rang auf $\mathbb{P}^1$. Zeigen Sie, dass es eine Surjektion

$$\bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \longrightarrow \mathcal{E}$$

geben muss, sobald n, s hinreichend groß sind. Unter welchen Umständen ist $s = \operatorname{rank}(\mathcal{E})$ möglich?

Aufgabe 4. Sei d eine ganze Zahl, und $\mathcal{E}$ die lokal freie Garbe vom Rang $r = 2$ auf $\mathbb{P}^1$, welche durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} T^{-2} & T^d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k[T^{\pm 1}])$$

gegeben wird. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ in einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$$

liegt, und bestimmen Sie den Spaltungstyp (n_1, n_2) von $\mathcal{E}$ in Abhängigkeit von der Zahl $d \in \mathbb{Z}$.

Abgabe: Bis Montag, den 17.12.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.